CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO
industrial y de servicios #130

NOMBRE DE LA MATERIA:

Matemáticas IV
(Geometría Analítica)

PROFESOR:

Ing. Miguel Ángel Salazar Lozano

ALUMNO:

Carlos Francisco Cruz Fierro

ESPECIALIDAD:

Técnico Laboratorista Clínico

SEMESTRE:

IV

Enero – Junio 1993

GENERALIDADES

ANTECEDENTES

Durante siglos, la geometría y el álgebra se desarrollaron lentamente, paso a paso, como disciplinas matemáticas distintas. Sin embargo, en 1637, un matemático y filósofo francés, René Descartes, publicó su libro "La Geometría", en donde introdujo un recurso para unificar estas dos ramas de las matemáticas. La característica básica de este nuevo proceso, llamado ahora "Geometría Analítica", es el uso de un sistema de coordenadas. Mediante los sistemas de coordenadas, los métodos algebraicos se pueden aplicar con eficacia en el estudio de la geometría; pero quizá de mayor importancia sea el beneficio obtenido por el álgebra, con la representación gráfica de las ecuaciones. De hecho, el extraordinario aporte de Descartes preparó el camino para un rápido e intenso desarrollo de las matemáticas, pues proporcionó el marco adecuado para la creación del cálculo.

Muchos de los conceptos que se analizarán en el curso son de origen antiguo; no se debe caer en el error de pensar que se estudian sólo por su valor histórico. Por el contrario, estas ideas han soportado el paso del tiempo y se estudian hoy en día debido a su utilidad para tratar problemas presentes.

Los temas que se estudian en el curso tienen aplicaciones significativas en multitud de investigaciones matemáticas y en disciplinas tan diversas como astronomía, ingeniería, ciencias sociales, economía, etc.

★ **Geometría Analítica:** Estudia las figuras geométricas utilizando un sistema de coordenadas y los problemas geométricos por métodos algebraicos, que se representan por grupos numéricos y las figuras por ecuaciones.

COORDENADAS RECTANGULARES

Este sistema consiste en dos rectas o ejes, perpendiculares entre sí; generalmente un eje es horizontal y el otro vertical. El nombre de coordenadas rectangulares se debe precisamente a que los ejes, al cortarse, lo hacen formando ángulos rectos. Se llama también coordenadas cartesianas en honor del famoso matemático Descartes. Los ejes dividen el plano en el cual se trazan en cuatro partes llamadas cuadrantes, los cuales generalmente se numeran en sentido contrario a las manecillas del reloj, comenzando por el superior derecho.

En ambos ejes se marcan divisiones que corresponden a los números enteros, haciendo que el cero esté precisamente en el punto de intersección de dichos ejes. A este punto se le llama origen de las coordenadas. Entre las divisiones marcadas para los enteros pueden señalarse las subdivisiones que se quiera para lograr mayor precisión, pues cada eje es una recta numérica que contiene a todos los números reales, en forma creciente de izquierda a derecha en el eje horizontal y de abajo a arriba en el eje vertical; es decir, todos los números positivos están arriba y a la derecha del origen. Al eje horizontal se le llama eje de las abcisas o eje de las x, y al eje vertical, de las ordenadas o de las y.

Para ubicar un punto cualquiera en el plano, se consideran dos distancias: la distancia del punto al eje y, que siempre se escribe en primer lugar, y la distancia del punto al eje x, que se tomará en segundo lugar. Estas dos distancias son las coordenadas del punto.

La distancia de un punto al eje de las y es su abcisa y su distancia al eje de las x es su ordenada. Las abcisas se representan por x y las ordenadas por y, por lo que las coordenadas de un punto cualquiera P son: $P(x,y)$. Obsérvese que todos los puntos del plano tienen sus correspondientes coordenadas y que el plano es el producto cartesiano de los números reales por los números reales, puesto que como se dijo antes, en cada eje se representan todos los reales.

Localización de puntos en el plano

Cuando nos encontramos en una gran ciudad, podemos localizar cualquier esquina, mencionando dos datos, el nombre de la calle y el nombre de la avenida que la cruza. En un salón de clases se puede localizar cualquier asiento, con tan sólo mencionar dos datos, el número de la fila y el número de la hilera.

En el sistema de coordenadas rectangulares hay una relación que establece que a cada par de números reales (x, y) le corresponde un punto definido del plano, y a cada punto del plano le corresponde un par único de coordenadas (x, y).

En el proceso graficador hay que tomar en cuenta los signos de las coordenadas del punto para ubicarlo en los cuadrantes. Para ello se recomienda el empleo de papel cuadriculado ya que facilita el localizar o marcar puntos en un plano.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos se puede presentar en tres formas, las cuales explicaremos a continuación:

★ Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos localizados de manera general en un plano y que pertenecen a una misma recta horizontal, la distancia dirigida entre los puntos es:

$$\leftarrow P_1P_2 = x_2 - x_1 \qquad \rightarrow P_1P_2 = x_1 - x_2$$

y la de la distancia no dirigida entre estos puntos es:

$$|P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

★ Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos localizados de manera general en un plano y que pertenecen a una misma recta vertical, la distancia dirigida entre los puntos es:

$$\downarrow P_1P_2 = y_2 - y_1 \qquad \uparrow P_1P_2 = y_1 - y_2$$

y la de la distancia no dirigida entre estos puntos es:

$$|P_1P_2| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

★ Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos localizados de manera general en un plano y que no se hallen sobre una misma recta horizontal o vertical, la distancia dirigida entre los puntos es:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

División de un segmento en una razón dada

Como indica el título, el problema a resolver es encontrar las coordenadas de un punto que divida a un segmento recto de acuerdo a una condición previamente establecida a la cual se le llama razón. Es importante que exista esta condición, pues de lo contrario habría un número infinito de puntos que dividan al segmento. Por esta razón se entiende un cociente de dos números, indicado en forma de quebrado o fracción común. Así, como ejemplos de razones pueden citarse: 1/2, 3/8, 8/3, 3/4, etc. Así pues, el punto divide al segmento según lo indique la razón. Por ejemplo, 3/8 indica que habrá 3 partes del segmento de un lado y 8 del otro, totalizando 11. Es indispensable que en estos problemas se indique el sentido del segmento, es decir, su principio y su fin. Normalmente basta con colocar en ese orden las letras correspondientes a los puntos extremos. Las fórmulas para dividir un segmento en una razón dada son:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

Y para dividir al segmento por el punto medio:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

FORMAS GEOMÉTRICAS

RECTAS

Inclinación y pendiente de una recta

Para tratar el tema de pendiente de una recta debe conocerse primero lo que se entiende por inclinación de una recta. Cualquier recta que no esté en posición horizontal o vertical está inclinada. La inclinación se da como una medida del ángulo que forma la recta con la horizontal. Se llama ángulo de inclinación (α) al ángulo formado por la recta y el extremo positivo del eje x, a partir de éste, girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

La pendiente de una recta es la tangente de su ángulo de inclinación. Obsérvese que pendiente e inclinación no son sinónimos, pues una cosa es el ángulo y otra la tangente de dicho ángulo. Se utiliza la m para representar la pendiente. Los siguientes criterios facilitan la comprensión del comportamiento de la pendiente en el sistema de coordenadas rectangulares.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \alpha = \arctan m$$

- ★ m es un número positivo, si $0° < \alpha < 90°$.
- ★ m es un número negativo, si $90° < \alpha < 180°$.
- ★ $m = 0$, si $\alpha = 0°$ o si $\alpha = 180°$.
- ★ $m = \infty$, si $\alpha = 90°$.

Ángulo entre dos rectas

Dos rectas que se intersectan forman dos pares de ángulos iguales y un ángulo de un par es el suplemento de un ángulo del otro par. Si ϕ es un ángulo medido en dirección contraria a las manecillas del reloj, entre dos rectas, entonces:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Donde m_2 es la pendiente del lado terminal y m_1 es la pendiente del lado inicial.

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. Esto resulta claro observando que dos rectas cualesquiera, paralelas entre sí no horizontales cortan el eje x formando ángulos iguales, pues estos ángulos son correspondientes entre paralelas; las dos rectas tienen el mismo ángulo de inclinación y por lo tanto la misma pendiente, pues ésta es la tangente de dicho ángulo:

$$m_1 = m_2$$

Dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario:

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Ecuación de una recta en su forma de punto y pendiente

La línea recta se define como el lugar geométrico formado por los puntos tales que si se toman dos cualesquiera de ellos, se obtiene siempre la misma pendiente; esta pendiente se calcula a partir de la fórmula de la pendiente ya estudiada, modificada de la siguiente manera:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

De acuerdo con esto, se obtiene la ecuación de la recta:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Ésta es la primera forma en que estudiamos la ecuación de la recta, cuando se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos. También se usa cuando se conocen dos puntos de la recta, pues se calcula su pendiente. Y con ésta y cualquiera de los puntos conocidos se está en el caso señalado. En general, vamos a sustituir las coordenadas del punto conocido en (x_1, y_1) para dejar en la ecuación x y y como coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

Forma de la recta cuando se conocen su ordenada al origen y su pendiente

Si se plantea el problema de encontrar la ecuación de una recta conociendo su pendiente y la ordenada del punto donde la recta corta al eje de las ordenadas (la cual se llama ordenada al origen), se traza la gráfica con los datos que se tienen, si el punto dado es $P(0, b)$, entonces:

$$y = mx + b$$

Forma simétrica de la ecuación de la recta

Así como a la ordenada de la intersección de una recta con el eje de las y se le llama ordenada la origen (b), a la abcisa de la intersección de la recta con el eje x se le llama abcisa al origen y se representa con a, dadas las intersecciones $P_1(a, 0)$ y $P_2(0, b)$, la ecuación de la recta se convierte en:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Forma general de la ecuación de la recta

La forma general corresponde a la forma usual en que se han estado reportando las ecuaciones, es decir, ordenadas escribiendo primero el término en x, luego el término en y y el término independiente. Representando los coeficientes con letras, la ecuación queda así:

$$Ax + By + C = 0$$

También se obtienen las siguientes fórmulas con base en las anteriores:

$$m = -\frac{A}{B} \qquad a = -\frac{C}{A} \qquad b = -\frac{C}{B}$$

Distancia de un punto a una recta

Como aplicación de la forma normal de la ecuación de la recta, se obtiene una fórmula que permite calcular la distancia de un punto cualquiera $P(x_1, y_1)$ a una recta $Ax + By + C = 0$. La fórmula es la siguiente:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para eliminar la ambigüedad del signo del denominador, se está de acuerdo en que d sea positiva si P está arriba de la recta dada y negativa si P está debajo de la recta. Es posible lograr esto, escogiendo el signo del denominador igual al signo de B. Esto es, el coeficiente de y_1 será positivo cuando B sea positiva y será negativo cuando B sea negativa.

CIRCUNFERENCIA

Ecuacion de la circunferencia en la forma ordinaria

La circunferencia se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que está siempre a la misma distancia de un punto fijo, situado en el mismo plano y llamado centro. A la distancia que hay entre el centro y cualquier punto de la circunferencia se le llama radio.

Para encontrar la ecuación de la circunferencia primero vamos a considerar el caso particular, en que el centro de la circunferencia $C(0,0)$ está en el origen de las coordenadas y el punto $A(x_1, y_1)$ es un punto cualquiera de la circunferencia. Así, el radio se calcula con la fórmula:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Sustituyendo este valor en la siguiente ecuación se obtiene la Ecuación de la Circunferencia en la forma ordinaria con centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ahora vamos a encontrar la ecuación de la circunferencia cuando el centro es un punto cualquiera en el plano. A las coordenadas del centro les llamamos $C(h,k)$, considerando un punto cualquiera de la circunferencia $A(x_1, y_1)$, se calcula el radio con la fórmula:

$$r = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

Se sustituye el valor del radio y los valores de h y k en la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación de la circunferencia en la forma general

Si desarrollamos la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, efectuando los binomios al cuadrado, llegamos a la ecuación $x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$, ordenándola tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Ahora, si comparamos esta ecuación con la ecuación general de segundo grado con dos variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

podemos encontrar los valores de los coeficientes:

$$A = 1 \qquad B = 0 \qquad C = 1 \qquad D = -2h \qquad E = -2k \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

Y así se obtiene la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para este tipo de problemas se presentan dos casos:

- ★ Dado el centro y el radio hallar la ecuación: $D = -2h \quad E = -2k \quad F = h^2 + k^2 - r^2$.
- ★ Dada la ecuación encontrar centro y radio: $h = -\frac{D}{2} \quad k = -\frac{E}{2} \quad r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$.

Determinar la ecuación de la circunferencia a partir de tres condiciones dadas

La ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ contiene tres constantes arbitrarias independientes, que son h, k y r. De la misma manera, la ecuación de la circunferencia en su forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ contiene también tres constantes arbitrarias independientes, que son D, E y F. Por lo anterior, la ecuación de la circunferencia en cualquiera de sus formas (ordinaria y general) se obtiene al determinar los valores de las tres constantes respectivas.

Dadas tres condiciones independientes que den lugar a tres ecuaciones independientes, las cuales están en función de las tres constantes arbitrarias y que al resolverse el sistema anterior, se demuestra que geométricamente y analíticamente la ecuación de la circunferencia quede perfectamente determinada.

Las tres condiciones independientes que determinan la ecuación de la circunferencia pueden ser:

- ★ Tres puntos por donde pasa la circunferencia.
- ★ Dos puntos y una recta.
- ★ Un punto y dos rectas.
- ★ Tres rectas.

Dependiendo de las condiciones dadas, el aplicar una forma de las ecuaciones de una circunferencia puede ser más conveniente que la otra.

El único caso a ver en este curso es el primero, tres puntos de la circunferencia. El procedimiento para resolverlo es el siguiente:

1. Se sustituyen las coordenadas de cada uno de los puntos en los valores de x y y de la forma general de la ecuación, a fin de obtener un sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas (D, E, F).
2. Se resuelve dicho sistema, generalmente por suma-resta, para obtener los valores de D, E y F.
3. Se sustituyen estos valores en la forma general de la ecuación, y con base en ellos se obtiene la forma ordinaria de la ecuación.

PARÁBOLA

Definimos a la parábola como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que está siempre a la misma distancia de un punto fijo llamado foco que de una recta fija llamada directriz, situados tanto el foco como la directriz en el mismo plano de la parábola.

Eje de la parábola es la recta que pasa por el foco y por el punto de la parábola llamado vértice. La posición del eje determina la posición de la parábola, hay parábolas horizontales, verticales o inclinadas, según el eje sea horizontal, vertical o inclinado. Directriz de la parábola es una recta perpendicular al eje de la parábola y que está a la misma distancia del vértice que el vértice del foco. A la recta que une dos puntos de la parábola, que pasa por el foco y que es perpendicular al eje de la parábola se le llama lado recto de la parábola.

La ecuación de la parábola cambia de acuerdo con su posición y con la situación del vértice. Así, estudiaremos la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen, de la parábola vertical con vértice en el origen, de la parábola horizontal con vértice en cualquier punto del plano y de la parábola vertical con vértice en cualquier punto del plano.

Forma ordinaria de las ecuaciones de las parábolas horizontales y verticales

La distancia del vértice al foco la representamos con p y observamos que por definición esta distancia p es la misma que hay entre el vértice y la directriz. El signo de p nos indica si la parábola se abre hacia la derecha o hacia arriba ($p > 0$) o hacia la izquierda o hacia abajo ($p < 0$). Así, la ecuación ordinaria de la parábola horizontal con vértice en el origen es:

$$y^2 = 4px$$

y la ecuación ordinaria de la parábola vertical con vértice en el origen es:

$$x^2 = 4py$$

La ecuación para calcular el lado recto es la misma para ambos casos:

$$\text{Lr} = |4p|$$

El valor de p se obtiene directamente de la gráfica o de la ecuación.

Para encontrar las ecuaciones de la parábola horizontal o vertical, asignamos las letras (h,k) a las coordenadas del vértice. Así, queda la ecuación de la parábola horizontal:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Y la ecuación de la parábola vertical:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Forma general de la ecuación de la parábola

Forma general de la ecuación de la parábola horizontal

Si desarrollamos la forma ordinaria de la ecuación de la parábola horizontal $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, nos queda $y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph$. Si agrupamos y ordenamos términos:

$$y^2 - 4px - 2yk + k^2 + 4ph = 0$$

Lo comparamos con la ecuación general de segundo grado con dos incógnitas, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, para poder encontrar el valor de los coeficientes:

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 1 \qquad D = -4p \qquad E = -2k \qquad F = k^2 + 4ph$$

Y así se obtiene la forma general de la ecuación de la parábola horizontal:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se presentan dos casos:

- ★ Dado el vértice y el foco hallar la ecuación: $D = -4p \quad E = -2k \quad F = k^2 + 4ph$.
- ★ Dada la ecuación encontrar el vértice y el foco: $p = -\frac{D}{4} \quad k = -\frac{E}{2} \quad h = \frac{F - k^2}{4p}$.

Forma general de la ecuación de la parábola vertical

Si desarrollamos la forma ordinaria de la ecuación de la parábola horizontal, $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, nos queda $x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk$. Si agrupamos y ordenamos términos:

$$x^2 - 2xh - 4py + h^2 + 4pk = 0$$

Lo comparamos con la ecuación general de segundo grado con dos incógnitas, , para poder encontrar el valor de los coeficientes:

$$A = 1 \qquad B = 0 \qquad C = 0 \qquad D = -2h \qquad E = -4p \qquad F = h^2 + 4pk$$

Y así se obtiene la forma general de la ecuación de la parábola horizontal:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se presentan dos casos:

- ★ Dado el vértice y el foco hallar la ecuación: $D = -2h \quad E = -4p \quad F = h^2 + 4pk$.
- ★ Dada la ecuación encontrar el vértice y el foco: $p = -\frac{E}{4} \quad h = -\frac{D}{2} \quad k = \frac{F - h^2}{4p}$.

ELIPSE

Se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, situados en el mismo plano y llamados focos, es una cantidad constante y mayor que la distancia entre los focos. La elipse puede estar situada en posición horizontal, vertical o inclinada.

La elipse es una curva cerrada que tiene dos ejes perpendiculares entre sí y siempre uno mayor que el otro; al mayor se le llama eje mayor; y al otro, eje menor. Al punto de intersección de sus ejes se le llama centro y a los puntos extremos del eje mayor, vértices de la elipse. La elipse tiene dos lados rectos, que son rectas que unen dos puntos de la elipse pasando por los focos y siendo perpendiculares al eje mayor donde están situados los focos. La posición del eje mayor nos indica la posición de la elipse.

Ecuaciones de la elipse en la forma ordinaria

<u>*Elipse horizontal con centro en el origen*</u>

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a^2=b^2+c^2 \qquad \mathrm{Lr}=\frac{2b^2}{a} \qquad e=\frac{c}{a}<1$$

<u>*Elipse vertical con centro en el origen*</u>

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad a^2=b^2+c^2 \qquad \mathrm{Lr}=\frac{2b^2}{a} \qquad e=\frac{c}{a}<1$$

<u>*Elipse horizontal con centro en un punto cualquiera*</u>

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

<u>*Elipse vertical con centro en un punto cualquiera*</u>

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Forma general de la ecuación de la elipse

El criterio para establecer la orientación de la elipse es el siguiente:

- ★ Si $C>A$, la elipse es horizontal.
- ★ Si $A>C$, la elipse es vertical.

<u>*Ecuación de la elipse horizontal*</u>

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$A = b^2 \qquad C = a^2 \qquad D = -2b^2h \qquad E = -2a^2k \qquad F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$$

$$a = \sqrt{C} \qquad b = \sqrt{A} \qquad h = -\frac{D}{2b^2} \qquad k = -\frac{E}{2a^2}$$

Ecuación de la elipse vertical

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A = a^2 \qquad C = b^2 \qquad D = -2a^2h \qquad E = -2b^2k \qquad F = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$$

$$a = \sqrt{A} \qquad b = \sqrt{C} \qquad h = -\frac{D}{2a^2} \qquad k = -\frac{E}{2b^2}$$

HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de manera que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es una cantidad constante, y menor que la distancia entre los dos focos.

La recta en que están situados los focos en uno de los ejes de la hipérbola y se llama eje focal. Al segmento del eje focal que une los vértices se llama eje transverso, y existe otro eje, perpendicular al eje transverso, que recibe el nombre de eje conjugado. El eje transverso y el eje conjugado se intersectan en el centro de la hipérbola.

La hipérbola tiene dos lados rectos, igual que la elipse, que son rectas que unen dos puntos de la hipérbola, pasando por los focos y siendo perpendiculares al eje focal, que es donde están los focos.

La hipérbola es simétrica y tiene dos asíntotas que se cortan en el centro de la hipérbola.

Forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola

La ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y la fórmula para las ecuaciones de las asíntotas es $y = \pm \frac{b}{a} x$.

La ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen es $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ y la fórmula para las ecuaciones de las asíntotas es $y = \pm \frac{a}{b} x$.

Las siguientes fórmulas son válidas para ambos tipos de hipérbolas: $\text{Lr} = \frac{2b^2}{a}$, $c^2 = a^2 + b^2$ y $e = \frac{c}{a} > 1$.

Hipérbola horizontal con centro en cualquier punto

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad y = \pm \tfrac{b}{a}(x-h) + k$$

Hipérbola vertical con centro en cualquier punto

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad y = \pm \tfrac{a}{b}(x-h) + k$$

Ecuación general de las hipérbolas

Hipérbola horizontal

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A = b^2 \qquad C = -a^2 \qquad D = -2b^2h \qquad E = 2a^2k \qquad F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$$

$$a = \sqrt{-C} \qquad b = \sqrt{A} \qquad h = -\frac{D}{2b^2} \qquad k = \frac{E}{2a^2}$$

En la hipérbola horizontal, el valor de A es positivo.

Hipérbola vertical

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$A = -a^2 \qquad C = b^2 \qquad D = 2a^2h \qquad E = -2b^2k \qquad F = b^2k^2 - a^2h^2 - a^2b^2$$

$$a = \sqrt{-A} \qquad b = \sqrt{C} \qquad h = \frac{D}{2a^2} \qquad k = -\frac{E}{2b^2}$$

En la hipérbola vertical, el valor de A es negativo.

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

En los temas correspondientes a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola se estudió la ecuación general de segundo grado con dos variables; ésta es una ecuación que contiene todos términos diferentes posibles de una ecuación de segundo grado con dos variables:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En cada curva estudiamos su ecuación en la forma general y vimos los valores que corresponden a cada uno de los coeficientes de la ecuación general de segundo grado, es decir, A, B, C, D, E, y F.

En la ecuación general de segundo grado con dos variables, se llama indicador o discriminante de la ecuación al valor de la expresión $B^2 - 4AC$, el cual representaremos con la letra I:

$$I = B^2 - 4AC$$

- Si el valor de I es menor de cero, se trata de una circunferencia (si A es igual a C) o de una elipse (si A es diferente de C pero con signos iguales).
- Si el valor de I es cero, se trata de una parábola.
- Si el valor de I es mayor de cero, se trata de una hipérbola.