



CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL TRANSITORIA

OBJETIVO

Mostrar visualmente el fenómeno de conducción transitoria en una dimensión, mediante mezclas de soluciones coloreadas, comparando con las predicciones del modelo matemático.

ANTECEDENTES

Uno de los casos más simples de conducción en estado transitorio es el de una barra recta de sección transversal constante, que inicialmente se encuentra a una temperatura, y en tiempo cero se cambia la temperatura de un extremo a una temperatura diferente de la inicial. En este caso, se presenta conducción de calor, cambiando el perfil de temperaturas con respecto al tiempo hasta que se alcanza un perfil de temperaturas lineal.

Considérese una barra de longitud L , aislada lateralmente y que se encuentra inicialmente a una temperatura $T(x,0) = 0$. En $t = 0$, la temperatura del extremo izquierdo aumenta repentinamente y se mantiene constante a $T(0,t) = T_1$, mientras que la temperatura del extremo derecho se mantiene constante a $T(L,t) = 0$. El planteamiento matemático de este problema de conducción es:

Ecuación diferencial	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$
Condiciones de frontera	$T = T_1$ para $x = 0$ y $t > 0$ $T = 0$ para $x = L$ y $t > 0$
Condición inicial	$T = 0$ para $t \leq 0$ y $0 \leq x \leq L$

La solución a este problema se obtiene por separación de variables, que conduce a una serie de Fourier, dando como perfil de temperaturas:

$$T(x,t) = T_1 \left[1 - \frac{x}{L} - \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda_n x)}{\lambda_n} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \right] \quad \text{donde } \lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

Por otro lado, la aproximación explícita en diferencias finitas de la ecuación diferencial es:

$$\frac{T(x,t + \Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} = \alpha \frac{T(x + \Delta x,t) - 2T(x,t) + T(x - \Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$

de donde se puede despejar $T(x,t + \Delta t)$:



$$T(x, t + \Delta t) = T(x, t) + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} [T(x + \Delta x, t) - 2T(x, t) + T(x - \Delta x, t)]$$

Si se escoge $\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$, la ecuación anterior se simplifica a:

$$T(x, t + \Delta t) = \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t)}{2}$$

es decir, que en cada iteración, la temperatura en un punto es el promedio de las temperaturas de la iteración anterior, en los puntos adyacentes.

En este caso, el desarrollo del perfil de temperaturas se puede visualizar mediante mezclado de soluciones, ya que al mezclar volúmenes iguales de dos soluciones se obtiene una concentración que es el promedio de las concentraciones de las dos soluciones originales.

El caso particular a simular es una barra de cobre de 10 centímetros de longitud, inicialmente a 0 °C, y cuyo extremo izquierdo se calienta súbitamente a 100 °C. La temperatura del otro extremo se mantiene constante a 0 °C. Usar $\Delta x = 1$ cm.

EQUIPO Y REACTIVOS

(lista no necesariamente exhaustiva)

- Espectrofotómetro o fotómetro de filtros
- 22 tubos de ensaye
- 2 gradillas
- Vaso de precipitados de 50 ml
- Pipeta de 5 ml

- Agua destilada
- 40 ml de solución de colorante vegetal para alimentos (proporcionada por el instructor)

RIESGOS ADICIONALES DE SEGURIDAD

Ninguno en particular.

MANEJO DE RESIDUOS

No se generan residuos peligrosos. La solución empleada se elimina por el drenaje.



PROCEDIMIENTO

1. Se montan 11 tubos en cada una de las dos gradillas y se numeran del 0 al 10. Cada uno de los tubos representará un punto a lo largo de la barra, desde $x = 0$ hasta $x = L$.
2. En la primer gradilla, se agregan 5 ml de solución coloreada al tubo 0. Este tubo corresponde a la condición de frontera $T(0,t) = T_1$, por lo que su contenido siempre deberá ser la solución coloreada original.
3. En el último tubo de la primer gradilla, se agregan 5 ml de agua destilada. Este tubo corresponde a la condición de frontera $T(L,t) = 0$, por lo que su contenido siempre deberá ser agua destilada.
4. En cada uno de los tubos restantes de la primer gradilla, se colocan 5 ml de agua destilada. Estos tubos corresponden a la condición inicial $T(x,0) = 0$.
5. A continuación se efectúa la mezcla de las soluciones, transfiriéndolas a los tubos de la segunda gradilla de acuerdo al esquema de la página siguiente. Obsérvese que se da un tratamiento especial a los tubos de los extremos ya que corresponden a las condiciones de frontera. Este proceso de transferir y mezclar las soluciones de una gradilla a la otra corresponde a avanzar en el tiempo un intervalo Δt .
6. Se mide la absorbancia de todos los tubos, ajustando a cero absorbancia con blanco de agua destilada. Usar la longitud de onda a la cual la absorbancia de la solución sea máxima. (Obsérvese que no tiene caso leer la absorbancia de los tubos que aún contienen agua destilada pura).
7. Se repite el proceso de mezclado (desde el paso 5) por lo menos diez veces.

CÁLCULOS Y OBSERVACIONES

Reportar el valor de Δt y cómo se determinó. No olvidar hacer referencia a las fuentes bibliográficas citadas para obtener propiedades físicas del material de la barra.

Reportar los valores medidos de absorbancia de las soluciones en una tabla. Obtener la "temperatura experimental" ajustando proporcionalmente estos valores de tal forma que la absorbancia del tubo 0 corresponda a $T = 100\text{ }^\circ\text{C}$, reportando estos valores en otra tabla.

Usando la solución exacta para $T(x,t)$ dada en los antecedentes, calcular la "temperatura del modelo" que corresponda a cada tubo, en cada paso de mezclado. Recordar que cada tubo corresponde a una cierta posición x en la barra, y que cada mezcla sucesiva corresponde a un cierto valor t del tiempo. Reportar estas temperaturas de acuerdo al modelo en otra tabla.

Generar una serie de gráficos, uno por cada paso de mezclado, donde se comparen los valores "experimentales" de temperatura con los predichos por el modelo. SUGERENCIA: Generalmente los datos experimentales se grafican con símbolos sin conectarse con líneas, y los modelos matemáticos se grafican como líneas continuas. En base a los gráficos, comentar sobre la exactitud de este método. ¿Qué sucedería si en vez de dividir la barra en 10 intervalos se dividiera en 20?

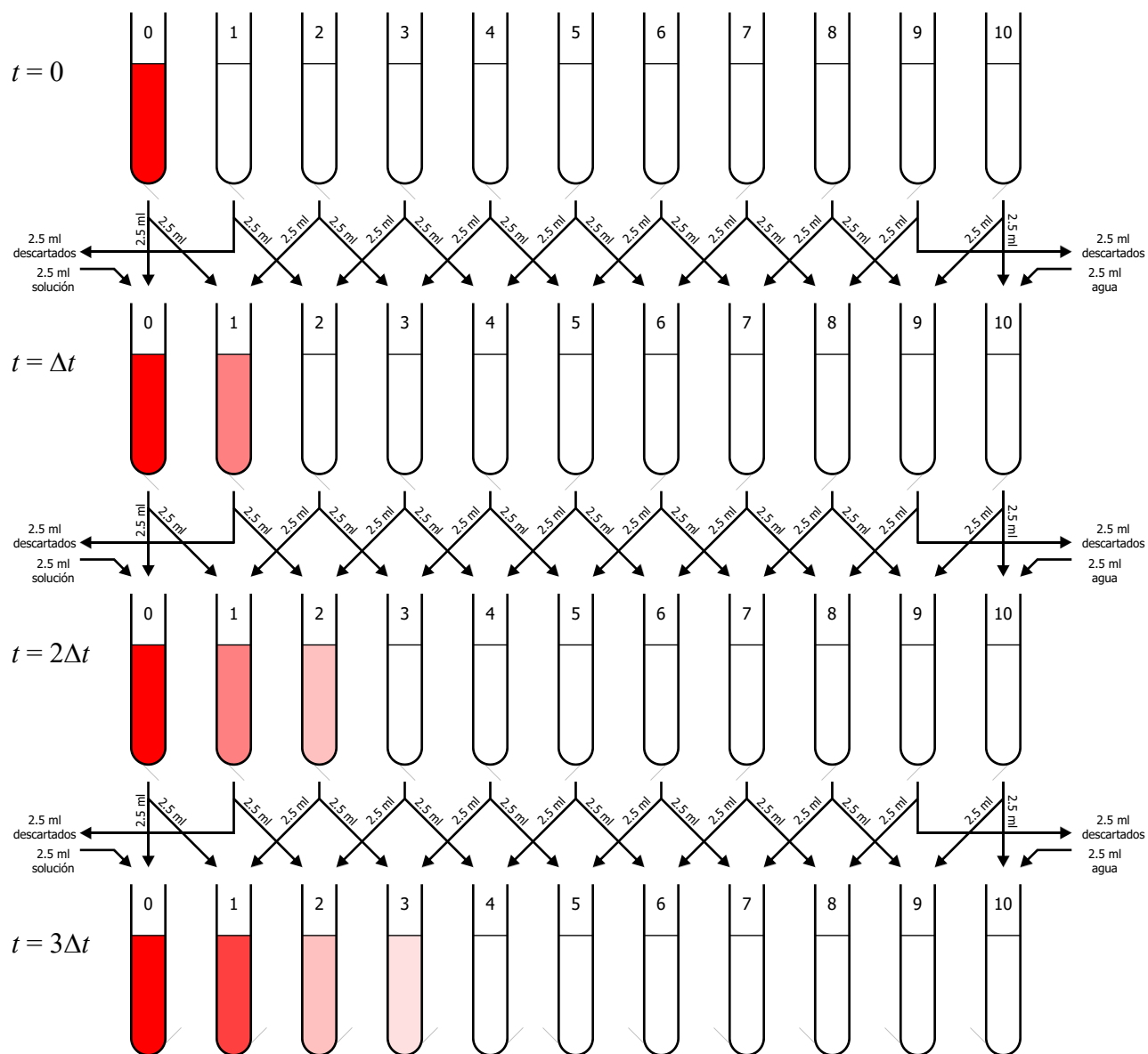


Figura 1. Primeros tres pasos de mezcla de las soluciones.