

# Balance de Momentum, Calor y Masa

Ejercicios Enero – Junio 2019

## EJERCICIO 0 – REPASO DE ECUACIONES DIFERENCIALES (OPCIONAL)

En cada caso, resolver la ecuación diferencial. Cuando se proporcione condiciones de frontera, emplearlas para obtener la solución particular.

RESPUESTAS:

1.  $\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 1 = 0$

$y = x^3 - x + C$

2.  $\frac{dy}{dx} + e^{-3x} = 0$

$y = \frac{1}{3}e^{-3x} + C$

3.  $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

$2e^{3x} + 3e^{-2y} = C$

4.  $\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) = 0$

$y = C_1 \ln x + C_2$

5.  $x \frac{dy}{dx} - 2y = 6$  con  $y = -1$  cuando  $x = 1$

$y = 2x^2 - 3$

6.  $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$  sujeta a  $y(0) = 1$

$y = \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{3}{4}e^{-x}$

7.  $2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} = 0$

$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$

8.  $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$

$y = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$

9.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 10 \frac{dy}{dx} + 25y = 0$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$

10.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$

$y = C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x$

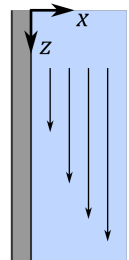
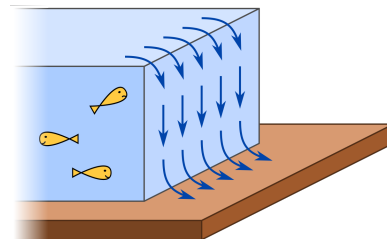
11.  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$  sujeta a  $y(0) = 3$  y  $y'(0) = 0$

$y = e^{2x} + 2e^{-x}$

## EJERCICIO 1

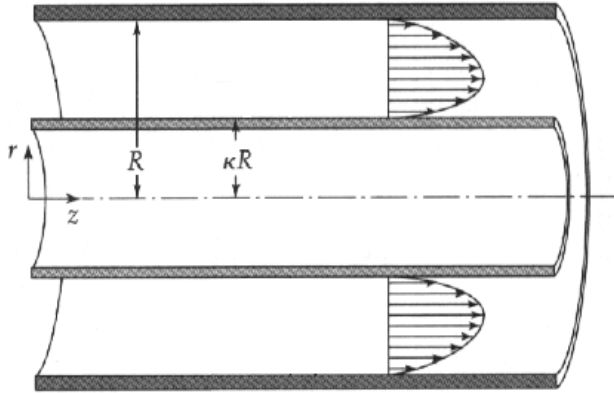
Una pecera está derramando agua por un costado, formando una capa vertical descendente de espesor  $\delta$  uniforme (con ancho  $W$  y altura  $H$ ). Empleando el sistema de coordenadas indicado en la figura, realizar un balance diferencial de momentum en un volumen de control de espesor  $\Delta x$  para encontrar el perfil de velocidad  $v_z$  en función de  $x$ . Determinar también la velocidad máxima.

RESPUESTA:  $v_z = \frac{\rho g \delta^2}{\mu} \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right], v_{z,\max} = \frac{\rho g \delta^2}{2\mu}$



## EJERCICIO 2

Adaptado de Bird (1960) y Bird (2002)



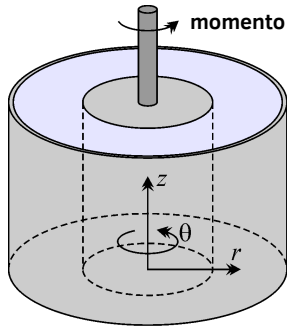
Obtener el perfil de velocidad  $v_z$  para el movimiento de un fluido newtoniano en flujo laminar isotérmico en el espacio anular entre dos tuberías cilíndricas coaxiales de radios  $R$  y  $\kappa R$  y longitud  $L$ . La presión del fluido en los extremos es  $P_0$  en  $z = 0$ , y  $P_L$  en  $z = L$  (con  $P_0 > P_L$ ).

OPCIONAL: Determinar también la velocidad máxima.

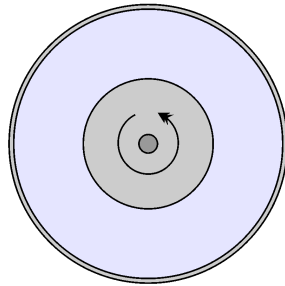
$$\text{RESPUESTA: } v_z = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1 - \kappa^2}{\ln \kappa} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

$$v_{z,\max} = \frac{(P_0 - P_L)R^2}{4\mu L} \left\{ 1 - \left(\frac{\kappa^2 - 1}{\ln \kappa^2}\right) \left[ 1 - \ln\left(\frac{\kappa^2 - 1}{\ln \kappa^2}\right) \right] \right\}$$

## EJERCICIO 3



vista en perspectiva



vista superior

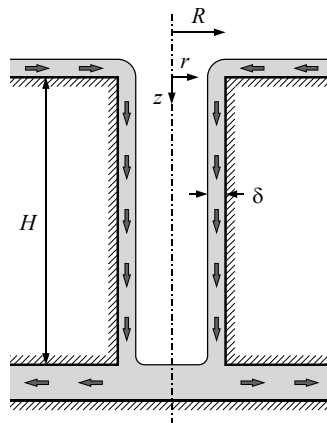
El espacio entre dos cilindros coaxiales verticales se encuentra lleno con un líquido newtoniano a temperatura constante. El cilindro interno tiene radio  $R_1$  y el cilindro externo tiene radio  $R_2$ . El cilindro interno gira con una velocidad angular constante  $\Omega$  debido a la aplicación de un momento de giro; mientras que el cilindro externo se mantiene fijo. Mediante simplificación de las ecuaciones de conservación, determinar el perfil de velocidad  $v_\theta(r)$  para el movimiento laminar del fluido.

NOTA: Recordar que la velocidad tangencial es igual al producto de la velocidad angular por el radio de giro.

$$\text{RESPUESTA: } v_\theta = \frac{\Omega R_1^2 R_2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_2}{r} - \frac{r}{R_2} \right)$$

## EJERCICIO 4 – OPCIONAL

Se desea determinar el perfil de velocidades en estado estable de un líquido newtoniano que escurre en flujo laminar a lo largo de un tubo vertical de longitud  $H$  y radio interior  $R$ , formando una película de espesor uniforme  $\delta$  sobre la superficie interior del tubo. La temperatura y la presión son constantes en todo el sistema.



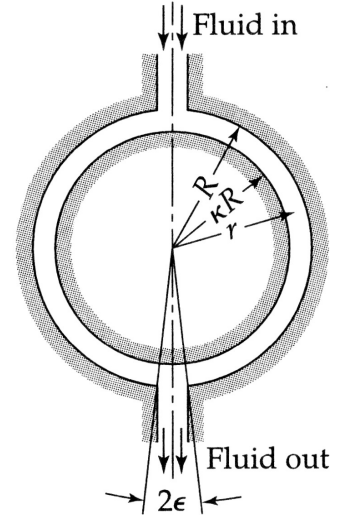
(vista en sección axial)

$$\text{RESPUESTA: } v_z(r) = \frac{\rho g R^2}{4\mu} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2 \left(\frac{R - \delta}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

### EJERCICIO 5

Adaptado de Bird (2003).

Un líquido newtoniano muy viscoso fluye en el espacio  $\kappa R \leq r \leq R$  ( $0 < \kappa < 1$ ) entre dos esferas concéntricas, como se muestra en la figura. Se desea hallar la velocidad de flujo en el sistema en función de la diferencia de presión  $\Delta P$  que se le aplica. Supóngase que  $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$  y que  $v_r = 0$  y  $v_\phi = 0$ . Despreciar también la gravedad y los efectos en los extremos.



(A) De la ecuación de conservación de masa, demostrar que  $v_\theta \sin \theta = u(r)$ , donde  $u(r)$  es una función de  $r$  aún desconocida.

(B) Escribir el componente  $\theta$  de la ecuación de conservación de momentum, suponiendo velocidades de flujo suficientemente bajas de forma que pueda despreciarse los términos de advección (flujo reptante). Demostrar que, con ayuda del resultado del inciso (A), esta ecuación se reduce a:

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) \right]$$

(C, opcional) La ecuación diferencial parcial obtenida en el inciso anterior se puede separar en dos siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias, donde  $B$  es una constante de separación:

$$\sin \theta \frac{dP}{d\theta} = B \qquad \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = B$$

Resolver estas ecuaciones diferenciales para llegar a los siguientes resultados:

$$\Delta P = B \ln \left( \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \right) = -BE(\varepsilon) \qquad \text{donde } E(\varepsilon) = -\ln \left( \frac{1 - \cos \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon} \right)$$

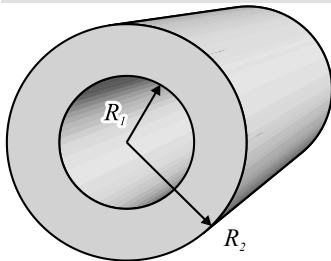
$$u = \frac{R\Delta P}{2\mu E(\varepsilon)} \left[ \left( 1 - \frac{r}{R} \right) + \kappa \left( 1 - \frac{R}{r} \right) \right] \qquad v_\theta(r, \theta) = \frac{R \csc \theta \Delta P}{2\mu E(\varepsilon)} \left[ \left( 1 - \frac{r}{R} \right) + \kappa \left( 1 - \frac{R}{r} \right) \right]$$

### EJERCICIO 6

Obtener el perfil de velocidad de un fluido de la potencia que desciende por una pared vertical formando una película descendente laminar de espesor  $\delta$ . Ubicar el origen del sistema de coordenadas en la parte superior de la pared.

$$\text{RESPUESTA: } v_z = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\rho g \delta^{n+1}}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x}{\delta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]$$

### EJERCICIO 7

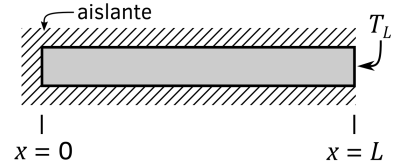


Considérese un cilindro hueco de radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$  y longitud  $L$ . Las superficies interna y externa del cilindro se mantienen a temperaturas constantes  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente, y los extremos del cilindro se mantienen aislados. Mediante simplificación de la ecuación de conservación de la energía térmica, obtener el perfil de temperaturas  $T(r)$  en estado estable, para  $R_1 \leq r \leq R_2$ .

$$\text{RESPUESTA: } T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$$

### EJERCICIO 8

Se tiene una barra metálica recta de longitud  $L$  que está aislada en todos sus lados excepto en el extremo  $x = L$ , que se mantiene a una temperatura constante  $T_L$ . En la barra hay una generación de calor no uniforme dada por  $\dot{G} = ax(L - x)$ , donde  $a$  es una constante con unidades  $\text{W/m}^5$ . Determinar el perfil de temperatura en estado estable  $T(x)$  así como la temperatura máxima en la barra.



$$\text{RESPUESTA: } T(x) = T_L + \frac{aL^4}{12k} \left[ \left( \frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 1 \right], \quad T_{\max} = T_L + \frac{aL^4}{12k}$$

### EJERCICIO 9

Un fluido newtoniano de propiedades constantes se mueve en flujo laminar estable por el interior de una tubería de radio interno  $R$  y longitud  $L$ , con un perfil de velocidad dado por:

$$v_z = \frac{(\Delta\mathcal{P})R^2}{4\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

donde  $\Delta\mathcal{P}$  es la diferencia de presión entre los extremos de la tubería y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. Si la viscosidad y la velocidad del fluido son suficientemente altas, la disipación viscosa de energía, producida por las fuerzas de fricción entre las capas de fluido, hace que la temperatura del fluido aumente. La pared de la tubería se mantiene a una temperatura constante  $T_w$ . Determinar el perfil de temperatura en este caso, en función de la posición  $r$ .

$$\text{RESPUESTA: } T = T_w + \frac{(\Delta\mathcal{P})^2 R^4}{64\mu L^2 k} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^4 \right]$$

### EJERCICIO 10

La pared de una mufla mide  $30 \times 20$  cm y está formada, de adentro hacia fuera, por una capa de 3.5 cm de ladrillo refractario de caolín ( $k = 0.26 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ), 4 cm de fibra de vidrio ( $k = 0.081 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ) y una lámina de 2.5 mm de espesor de aluminio ( $k = 273 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ). Determinar la resistencia térmica total y el flujo de calor a través de la pared cuando la mufla opera a  $800 \text{ }^\circ\text{C}$  y la superficie externa de la lámina de aluminio se encuentra a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Las resistencias por convección se pueden asumir despreciables.

RESPUESTA: 74 W

### EJERCICIO 11

Se tiene un fluido circulando por el interior de un tubo, y otro fluido diferente circulando por el exterior. El coeficiente de transferencia de calor por convección en el interior del tubo es  $h_i = 1035 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ , y el coeficiente de transferencia de calor por convección en el exterior del tubo es  $h_e = 1209 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . El tubo está hecho de bronce ( $k = 52 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ) y sus dimensiones son  $D_e = 1$  plg,  $D_i = 0.782$  plg y  $L = 6$  ft. Calcúlese la resistencia térmica total, el coeficiente global de transferencia de calor basado en el área externa, y el coeficiente global de transferencia de calor basado en el área interna.

$$\text{RESPUESTA: } R_T = 0.014546 \text{ K/W}, \quad U_e = 471.1 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}, \quad U_i = 602.4 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$$

### EJERCICIO 12 – OPCIONAL

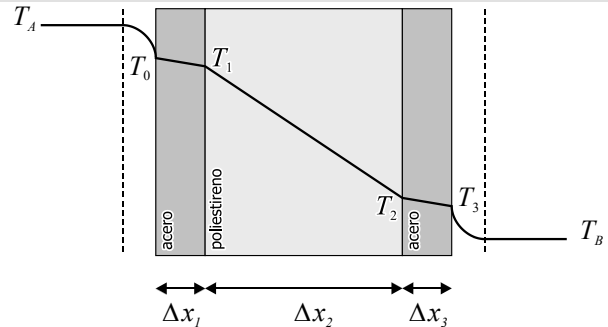
Una pared plana está compuesta de una capa de aislante de poliestireno entre dos láminas de acero. Un par de sensores de temperatura colocados a cada lado del poliestireno indican que  $T_1 = 260\text{ °C}$  y  $T_2 = 23\text{ °C}$ .

Determinar el coeficiente global de transferencia de calor  $U$ , la densidad de flujo de calor  $q$  que atraviesa la pared, y las temperaturas  $T_A$  y  $T_B$  del aire a cada lado de la pared.

OTROS DATOS:  $\Delta x_1 = 3\text{ mm}$ ,  $\Delta x_2 = 25\text{ mm}$ ,  $\Delta x_3 = 3\text{ mm}$

$h_0 = 800\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ,  $h_3 = 10\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ,  $k_{\text{acero}} = 50.2\text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $k_{\text{poliestireno}} = 0.033\text{ W/m}\cdot\text{K}$

RESPUESTA:  $U = 1.164\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ,  $q = 312.83\text{ W/m}^2$ ,  $T_A = 260.41\text{ °C}$ ,  $T_B = -8.31\text{ °C}$



### EJERCICIO 13

Se va a suministrar vapor a  $130\text{ °C}$  a un equipo, empleando una tubería de  $2\text{ m}$  de longitud y  $1/2\text{ plg}$  de diámetro externo. (A) ¿Con qué rapidez perderá calor la tubería si no se aísla? (B) ¿Cuál es el radio crítico de aislamiento si se va a emplear un aislante con conductividad térmica de  $0.065\text{ W/m}\cdot\text{K}$ ? (C) ¿Cuánto calor perderá la tubería si el espesor del aislamiento es  $5\text{ mm}$ ? En todos los casos, despreciar la resistencia por conducción en la pared de la tubería, y usar un coeficiente de transferencia de calor por convección de  $5\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$  y temperatura ambiente de  $25\text{ °C}$ .

RESPUESTA: (A)  $41.9\text{ W}$ , (B)  $13\text{ mm}$ , (C)  $49.7\text{ W}$ .

### EJERCICIO 14

Un dispositivo de transferencia de calor cuenta con una serie de aletas rectas de sección transversal rectangular uniforme, que ayudan a transferir calor desde una superficie a  $90\text{ °C}$  hacia el medio ambiente que está a  $25\text{ °C}$ . Las aletas están hechas de aluminio (conductividad térmica:  $237\text{ W/m}\cdot\text{K}$ ), tienen  $1\text{ plg}$  de ancho,  $1/8\text{ plg}$  de espesor, y  $3/4\text{ plg}$  de longitud (de la base al extremo libre). En las condiciones de operación, el coeficiente de transferencia de calor será  $470\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . Determinar la eficiencia y la efectividad de las aletas y cuánto calor disipa cada una.

RESPUESTA:  $\eta = 0.86$ ,  $\varepsilon = 11.6$ ,  $Q = 28.6\text{ W}$

### EJERCICIO 15

Se desea utilizar aletas circulares de espesor uniforme para promover la transferencia de calor desde un tubo de  $1\text{ plg}$  de diámetro. Las aletas deben tener  $2\text{ plg}$  de diámetro y estarán fabricadas de acero inoxidable ( $15.1\text{ W/m}\cdot\text{K}$ ). La temperatura del tubo y del aire circundante son  $85\text{ °C}$  y  $21\text{ °C}$ , respectivamente. El coeficiente de transferencia de calor por convección es  $80\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . Determinar qué espesor (en milímetros) deben tener las aletas, si cada una debe disipar calor con una rapidez de  $9.5\text{ W}$ .

RESPUESTA:  $1.2\text{ mm}$

### EJERCICIO 16 – OPCIONAL

Adaptado de Welty, Wicks y Wilson, "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa".

Una barra de acero (conductividad térmica:  $23\text{ W/m}\cdot\text{K}$ ) de  $3\text{ cm}$  de diámetro y  $45\text{ cm}$  de longitud forma parte de la estructura interna de una chimenea, donde está expuesta a gases calientes a  $350\text{ °C}$ . La barra está adherida a dos paredes opuestas de la chimenea, que mantienen una temperatura constante de  $200\text{ °C}$ . Si la temperatura máxima de la barra es  $300\text{ °C}$ , determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección (asumido constante).

RESPUESTA:  $10.58\text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

SUGERENCIA: La simetría del sistema permite analizar la barra como si se tratara de dos aletas unidas por su extremo libre. Demostrar primero que la temperatura  $T_L$  del extremo de una aleta recta de sección transversal constante cumple con la relación:

$$T_L = T_\infty + \frac{T_w - T_\infty}{\cosh \sqrt{Bi}}$$

### EJERCICIO 17

Una esfera metálica de masa  $m$ , diámetro  $D$  y temperatura inicial  $T_0$  se sumerge en un gran volumen de un líquido a temperatura  $T_\infty$  (que se puede asumir constante), con el que intercambia calor de acuerdo a la ley de Newton del enfriamiento ( $h$  constante). Determinar la temperatura de la esfera en función del tiempo. Se puede asumir que la esfera tiene una temperatura uniforme.

$$\text{RESPUESTA: } T = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-\frac{4\pi D^2 h}{m c_p} t}$$

### EJERCICIO 18 – OPCIONAL

Considérese un objeto sólido, con masa  $m_s$ , capacidad calorífica  $c_{ps}$  y temperatura inicial  $T_0$  que se introduce en un recipiente que contiene un fluido con masa  $m_f$ , capacidad calorífica  $c_{pf}$  y temperatura inicial  $T_{f0}$ . El recipiente está aislado, por lo que no hay pérdidas de calor al medio ambiente. El área del objeto es  $A$ , y el coeficiente de transferencia de calor entre el objeto y el fluido es  $h$ . La masa del fluido no se puede asumir infinita, por lo que debe tomarse en cuenta también el cambio de la temperatura del fluido  $T_f$  con respecto al tiempo. Realizar un balance de energía para el objeto y otro para el fluido, y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido para encontrar una ecuación que describa la temperatura  $T$  del objeto en función del tiempo.

$$\text{RESPUESTA: } T = \frac{m_s c_{ps} T_0 + m_f c_{pf} T_{f0}}{m_s c_{ps} + m_f c_{pf}} + \left( \frac{m_f c_{pf} (T_0 - T_{f0})}{m_s c_{ps} + m_f c_{pf}} \right) \exp \left[ \frac{-hA (m_s c_{ps} + m_f c_{pf})}{m_s c_{ps} m_f c_{pf}} t \right]$$

Sugerencia: Los balances de energía para el sólido y el fluido dan lugar a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{m_s c_{ps}} (T - T_f) \quad (1) \quad \frac{dT_f}{dt} = \frac{hA}{m_f c_{pf}} (T - T_f) \quad (2)$$

### EJERCICIO 19

Una varilla de vidrio borosilicato ( $k = 1.4 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $\alpha = 7.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) de 4 mm de diámetro se va a someter a un tratamiento térmico para mejorar su resistencia mecánica. Para ello, se introduce durante 7.5 segundos en un horno, donde va a entrar en contacto con aire caliente a  $350 \text{ }^\circ\text{C}$ . El coeficiente de transferencia de calor entre el aire y la varilla es  $830 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . Determinar la temperatura que alcanza el centro de la varilla, si su temperatura inicial era  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

RESPUESTA:  $320 \text{ }^\circ\text{C}$

### EJERCICIO 20

Para realizar pruebas de transferencia de calor, se emplea una esfera de 3 plg de diámetro hecha de un material no metálico ( $k = 4 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ), equipada con un sensor de temperatura en su centro, y un baño de aceite con agitación, ajustado para mantener una temperatura constante de  $200 \text{ }^\circ\text{C}$ .

(A) En el primer experimento, la esfera (inicialmente a una temperatura uniforme de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) se sumerge en el aceite caliente. El aceite se está agitando vigorosamente, lo que hace que el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el líquido y la esfera sea muy alto. Después de 5 minutos en el aceite, el sensor marca una temperatura de  $189 \text{ }^\circ\text{C}$ . ¿Cuál es la difusividad térmica del material de la esfera?

(B) En el segundo experimento, se desea medir el coeficiente de transferencia de calor por convección natural, por lo que se apaga el agitador del baño de aceite. La temperatura inicial de la esfera es  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Después de 90 segundos en el aceite, el sensor de la esfera registra  $29 \text{ }^\circ\text{C}$ . ¿Cuál es el valor del coeficiente de transferencia de calor en este caso?

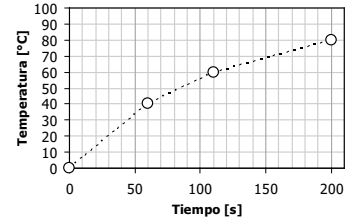
RESPUESTA:  $1.72 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $94.5 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$

### EJERCICIO 21 – OPCIONAL

Adaptado de Levenspiel (1998), "Engineering Flow and Heat Exchange", Plenum Publishing Corporation.

Un cilindro largo de cobre de 4.7 cm de diámetro externo, inicialmente a 0 °C, se introduce rápidamente en un lecho fluidizado que se mantiene a 100 °C. Un termopar instalado en el centro del cilindro indica temperaturas de 40, 60 y 80 °C después de 60, 110 y 200 s, respectivamente. Determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el cilindro y el lecho.

NOTA: Se puede asumir que el número de Biot es pequeño, por lo que la temperatura medida por el termopar es la temperatura promedio del cilindro.



RESPUESTA: 343 W/m·K

### EJERCICIO 22

Adaptado de Incropera (2006)

Usted ha experimentado el enfriamiento por convección si alguna vez sacó la mano por la ventana de un vehículo en movimiento o si la sumergió en una corriente de agua. Si la superficie de la mano se asume a una temperatura constante de 30 °C, estimar la rapidez con que se pierde calor por convección para (A) una velocidad del vehículo de 35 km/h en aire a -5 °C, y (B) una velocidad de 20 cm/s en una corriente de agua a 10 °C. ¿En cuál condición se sentirá más frío?

RESPUESTA: (A) 1345.7 W/m<sup>2</sup> (B) 21575 W/m<sup>2</sup>

### EJERCICIO 23

Una tubería horizontal de 1 plg de diámetro externo y 2.5 m de longitud se encuentra en aire a 20 °C y 1 atm de presión absoluta. La superficie externa de la tubería está a una temperatura uniforme de 100 °C. Calcular la rapidez con la que la tubería pierde calor en los siguientes casos: (A) si el aire circundante se encuentra en reposo; (B) si el aire circundante se mueve perpendicularmente a la tubería con una velocidad de 0.5 m/s.

RESPUESTA: (A) 130.8 W; (B) 226.3 W

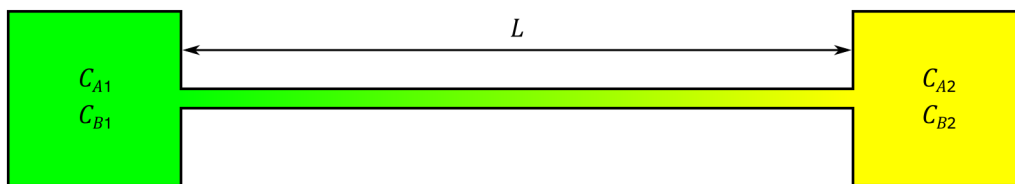
### EJERCICIO 24

[vaca esférica]

RESPUESTA: (A) 239.2 W, (B) 441.9 W

### EJERCICIO 25

Se tienen dos recipientes grandes llenos de mezclas de dos gases A y B con diferente concentración, conectados mediante un tubo capilar de longitud  $L$  y diámetro  $D$ . El sistema se mantiene a temperatura y presión constantes. Encontrar el perfil de concentración de A en función de la posición  $z$  a lo largo del capilar.



RESPUESTA:  $C_A = C_{A1} + (C_{A2} - C_{A1}) \frac{z}{L}$

### EJERCICIO 26

Un ducto de longitud total  $2L$ , lleno de un gel permeable, conecta dos recipientes idénticos llenos de una solución diluida de un reactivo A, con concentración  $C_0$ . Este reactivo entra por difusión al gel, donde ocurre una reacción de primer orden  $A \longrightarrow \text{productos}$ . Ubicando el origen del sistema de coordenadas en el centro del ducto, determinar el perfil de concentración de A en función de la posición en el gel.

$$\text{RESPUESTA: } C_A = C_0 \frac{\cosh\left(x\sqrt{k/\mathcal{D}_{AB}}\right)}{\cosh\left(L\sqrt{k/\mathcal{D}_{AB}}\right)}$$

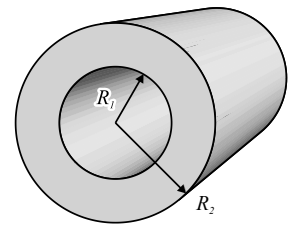
(OPCIONAL) El grupo adimensional  $\phi = \sqrt{kL^2/\mathcal{D}_{AB}}$  es el módulo de Thiele (para una reacción de primer orden) y se puede interpretar como:

$$\phi = \frac{\text{velocidad de reacción química}}{\text{rapidez de difusión molecular}}$$

Considerando esta definición, hacer un bosquejo del perfil de concentración cuando el módulo de Thiele es un valor muy pequeño o un valor muy grande.

### EJERCICIO 27

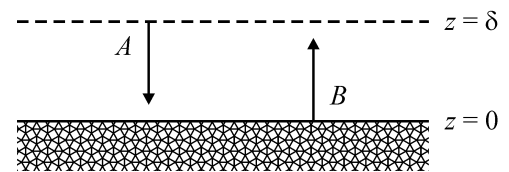
Se emplea una tubo de membrana permeable (radio interno  $R_1$  y radio externo  $R_2$ ) para remover el dióxido de carbono de una corriente de aire cuya presión parcial de  $\text{CO}_2$  es  $P_{A0}$ , que se puede asumir constante. El  $\text{CO}_2$  se difunde radialmente a través de la pared del tubo desde el interior hacia el exterior, donde existe aire esencialmente libre de  $\text{CO}_2$ . El aire del exterior se difunde en dirección opuesta al  $\text{CO}_2$ , de tal forma que en todo el sistema se mantiene la misma presión total de 1 atm. Aunque la presión parcial de  $\text{CO}_2$  va a ir disminuyendo a lo largo del tubo, en este ejercicio se analiza sólo la difusión en la porción inicial del tubo, por lo que  $P_{A0}$  puede asumirse constante. Determinar (A) el perfil de presión parcial de  $\text{CO}_2$  en la pared del tubo, y (B) la densidad de flujo molar del  $\text{CO}_2$  ( $n_{A,r}$ ).



$$\text{RESPUESTA: } P_A = P_{A0} \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}, \quad n_{A,r} = \frac{\mathcal{D}_{AB} P_{A0}}{rRT \ln(R_2/R_1)}$$

### EJERCICIO 28 – OPCIONAL

Considérese la difusión en fase gaseosa cerca de la superficie de un catalizador. El componente A se difunde a través de una capa límite estancada (es decir, en reposo) hacia el catalizador, donde reacciona instantáneamente para producir B de acuerdo a la reacción  $A \longrightarrow 2B$ . El componente B se difunde alejándose del catalizador, también a través de la misma capa. Fuera de la capa límite ( $z \geq \delta$ ) se tiene gas A puro. El sistema se mantiene isotérmico e isobárico. Determinar el perfil de concentraciones en estado estable para la fracción mol de A en la capa límite.



$$\text{RESPUESTA: } y_A = 2^{z/\delta} - 1$$

### EJERCICIO 29

Un disco sólido de ácido benzoico de 25 mm de diámetro se encuentra girando a 20 rpm sumergido en un recipiente con agua a 25 °C, que tiene una concentración de ácido benzoico disuelto de 0.5 kg/m<sup>3</sup>. Calcular la rapidez con la que se está disolviendo el ácido benzoico (en g/cm<sup>2</sup>·s), sabiendo que el coeficiente de difusión del ácido benzoico en agua a 25 °C es 1×10<sup>-5</sup> cm<sup>2</sup>/s y su solubilidad en agua a 25 °C es 3 kg/m<sup>3</sup>.

NOTA: Como el ácido benzoico es sólo escasamente soluble en agua, el sistema es diluido.

$$\text{RESPUESTA: } k = 8.96 \times 10^{-4} \text{ cm/s}, \quad n_A = 2.24 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^2\text{-s}$$

### EJERCICIO 30

Se desea realizar una reacción química en fase acuosa que requiere de la presencia de oxígeno. Para mantener una alta concentración de oxígeno disuelto, se propone burbujear oxígeno puro en el tanque. Las burbujas, producidas en el fondo del tanque, tienen un diámetro promedio de 3 mm. El líquido se mantiene sin agitación, de tal forma que las burbujas ascienden sólo por flotación. El sistema está a 25 °C y 1 atm (constantes) y el medio de reacción se puede asumir con las mismas propiedades que el agua pura. Estimar el valor del coeficiente de transferencia de masa.

DATO ADICIONAL:  $D_{O_2-H_2O} = 2.4 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ .

RESPUESTA:  $1.23 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

### EJERCICIO 31 – OPCIONAL

El exceso de acetona se quita de una lámina plástica durante su fabricación, dejando que se evapore en una corriente de aire que fluye de forma paralela a la superficie de la lámina. La lámina mide 60 cm en la dirección del flujo. La corriente de aire se encuentra a 40 °C y 1 atm (presión total absoluta), fluye a 47 cm/s, y tiene una cantidad residual de vapor de acetona (30 mmHg). Determinar la rapidez promedio con la que se transfiere la acetona de la lámina al aire (en mol/m<sup>2</sup>·s).

NOTA: Las propiedades de la mezcla que se necesitan para los números de Reynolds y Schmidt deben ser estimadas a la concentración promedio de la película. No se puede asumir que el sistema es diluido.

DATOS ADICIONALES:

- ★ Presión de vapor de la acetona a 40 °C: 0.5576 atm.
- ★ Difusividad del vapor de acetona en aire a 40 °C y 1 atm: 0.1338 cm<sup>2</sup>/s.
- ★ Viscosidad del vapor de acetona pura a 40 °C y 1 atm:  $7.884 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

RESPUESTA: 0.0674 mol/m<sup>2</sup>·s

### EJERCICIO 32

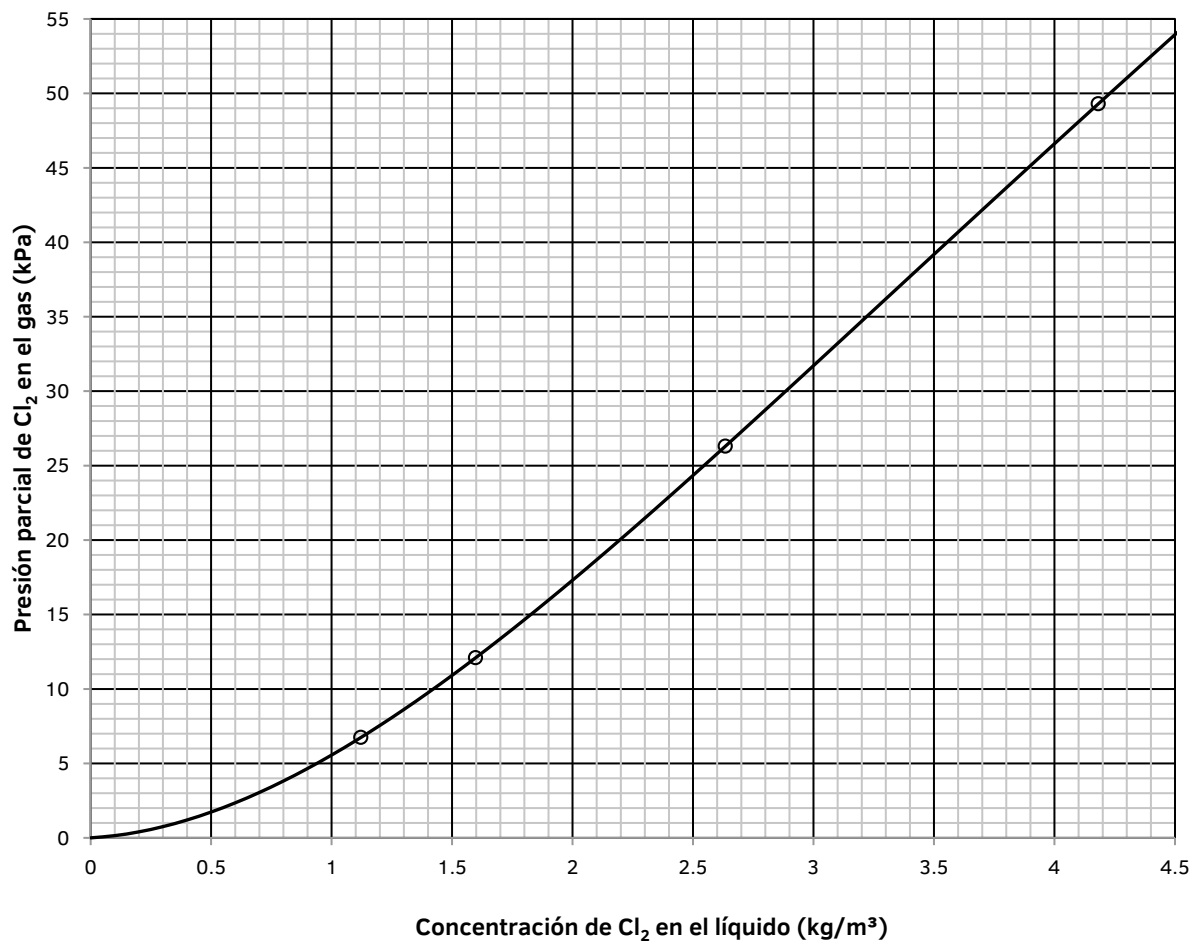
El agua clorada que se utiliza para blanquear la pulpa de papel se prepara por absorción de Cl<sub>2</sub> en agua. En ciertas condiciones de operación en el sistema, la presión parcial de cloro en la fase gaseosa es de 47 kPa y la concentración de cloro en el líquido es 0.2 kg/m<sup>3</sup>. El coeficiente global de transferencia de masa para el líquido es 3.16 m/h y el 20% de la resistencia a la transferencia de masa se presenta en la fase líquida. Para este caso, determinar lo siguiente:

- (A) los coeficientes individuales de transferencia de masa (en kg/kPa·m<sup>2</sup>·h y m/h, respectivamente).
- (B) las condiciones de la interfase (en kPa y kg/m<sup>3</sup>, respectivamente).
- (C) la densidad de flujo de transferencia de masa del cloro (en kg/m<sup>2</sup>·h).

Los datos disponibles para el equilibrio de cloro gaseoso con agua a 293 K (la temperatura de operación del equipo) se muestran en la tabla y en la gráfica:

Presión parcial de cloro (kPa)	6.74	12.1	26.3	49.3	97.7
Solubilidad del cloro (kg/m <sup>3</sup> )	1.12	1.60	2.63	4.18	7.25

Datos adaptados de Welty, Wilson y Wicks, "Fundamentos de Transferencia de Momentum, Calor y Masa", Limusa.



RESPUESTA: (A)  $0.288 \text{ kg/kPa}\cdot\text{m}^2\cdot\text{h}$ ,  $15.8 \text{ m/h}$ , (B)  $P_{A,i} = 5 \text{ kPa}$ ,  $C_{A,i} = 0.966 \text{ kg/m}^3$ , (C)  $n_A = 12.1 \text{ kg/m}^2\cdot\text{h}$

# ASUMIR QUE LA VACA ES UNA ESFERA

## Primero, algunos antecedentes...

Un granjero está preocupado porque sus vacas no están produciendo suficiente leche, y decide consultar algunos expertos para tratar de solucionar el problema. Pone un anuncio en el periódico solicitando ayuda profesional para su dilema y espera a que lleguen los especialistas...

El primero en llegar es un psicólogo. Él le dice al granjero que las vacas están estresadas. Opina que tienen recuerdos traumáticos de su infancia y que seguramente les hizo falta una figura paterna cuando eran terneras. Le recomienda al granjero hablar con ellas todas las tardes y ponerles música instrumental para que se relajen.

Luego viene un ingeniero industrial. Realiza un estudio de tiempos y movimientos mientras ordeñan cada vaca, y elabora un procedimiento interno para la ordeña. Con esto estima que la eficiencia de la producción aumentará en 17%, aunque recomienda instalar ordeñadoras automáticas para realizar la extracción de leche de manera rápida y consistente. Si el granjero sigue sus recomendaciones, posiblemente hasta se pueda certificar bajo la norma ISO 9001.

También va un decorador de interiores. Éste opina que el granero es muy monótono y pasado de moda. No sigue los principios básicos del Feng-Shui. Sugiere pintar el granero de tonos verdes y cafés, para recrear la sensación del ambiente natural en el que las vacas habrían vivido. También recomienda colocar plantas de interior y fotografías de llanuras y pastizales, que armonicen con el estilo general de la habitación.

Después llega un ingeniero civil. Toma las medidas del granero y divide el área total entre el número de vacas, descontando los pasillos para tránsito, y determina que las vacas están muy apretadas. Se necesita un granero más grande, donde a cada vaca se le puedan asignar por lo menos 3.47 m<sup>2</sup> de espacio.

Finalmente llega el científico. Después de meditar un poco sobre el problema, comienza a hacer cálculos y anotaciones en un pizarrón. El granjero, aunque no entiende nada de lo que está garabateado, se siente esperanzado porque ve que el científico es muy metódico en su desarrollo matemático. Después de varias horas de intensos cálculos, el científico anuncia triunfalmente que ha resuelto el problema, y empieza a explicarlo: "Comenzamos asumiendo que la vaca es una esfera..."



Cierto, estoy de acuerdo... no es un muy buen chiste. Pero resalta la sobre-simplificación que ocasionalmente se hace en ciencia e ingeniería. Aunque muchas veces esta simplificación permite llegar a una respuesta (y algo es mejor que nada) se debe tener cuidado de no llevarla al extremo, porque entonces puede ser que el modelo no tenga casi relación con el fenómeno real que se quiere estudiar.

## Ahora sí, el ejercicio...

Una vaca se queda fuera del establo en una fría noche invernal. La vaca está tan asustada que se queda inmóvil. El granjero ya está listo para irse a dormir cuando se da cuenta de que la vaca no está en el granero, pero no quiere tener que salir por ella. Como el granjero sabe que la vaca puede sobrevivir durante la noche si pierde calor con una rapidez menor a 350 watts, decide hacer primero algunos cálculos para decidir si debe salir a buscarla.

La temperatura ambiente es 4 °C (que sería una temperatura típica de un refrigerador de carnicería) y no sopla viento. La piel de la vaca tiene una temperatura superficial de 28 °C. Estimar la rapidez con la que la vaca pierde calor (en watts) si se asume que la vaca es:

- (A) una esfera de 1.1 m de diámetro.
- (B) un cilindro horizontal de 80 cm de diámetro y 1.4 m de longitud (usar el área total del cilindro, asumiendo que el coeficiente de transferencia de calor calculado para la superficie lateral también se puede usar para los extremos del cilindro).

**¿Es una buena suposición (principalmente para la vaca) asumir que es una esfera?**