Programación y Métodos Numéricos

Ejercicios Agosto – Diciembre 2022

Unidad 1 – Introducción a la programación

EJERCICIO 1 (2 puntos)

Escribir un programa en Scilab que calcule el volumen de un cubo dada la longitud del lado (proporcionado en metros). Para la corrida de prueba, utilizar 3.1 metros para el lado.

RESULTADO: 29.791 m^3

EJERCICIO 2 (2 puntos)

Escribir un programa en Scilab que calcule el radio de una esfera a partir de su volumen (proporcionado por el usuario). Como valor para la corrida de prueba, emplear 435 cm^3.

RESULTADO: 4.7 cm.

EJERCICIO 3 (2 puntos)

Escribir un programa en Scilab que calcule el área lateral y el área total de un cilindro. El programa debe pedir como datos el radio y la longitud del cilindro. Para la corrida de prueba, usar como datos 2.7 cm de radio y 12.4 cm de longitud.

RESULTADO: A_L = 210.36 cm^2, A_T = 256.17 cm^2.

EJERCICIO 4 (4 puntos)

El costo total de fabricación e instalación de un ventanal rectangular (en pesos) está dado por la ecuación:

$$C = 450 + 80P + 100A + 50A^{1.4}$$

donde P es el perímetro del ventanal (en metros) y A es el área del ventanal (en metros cuadrados). Escribir un programa en Scilab que pida como datos el **ancho** y la **altura** del ventanal, calcule el perímetro y el área y el costo total del ventanal. Para la corrida de prueba, calcular el costo de un ventanal de 4.5 m de ancho y 2.2 m de alto.

RESULTADO: $3750.40

EJERCICIO 5 (4 puntos)

Para dos números x_1 y x_2, la media aritmética, la media geométrica y la media armónica se calculan respectivamente como:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (x_1 x_2)^{1/2} \qquad \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

Escribir un programa en Scilab que pida dos números y reporte las tres medias. Para la corrida de prueba, usar 4 y 21.

RESPUESTA: 12.5, 9.165, 6.72

EJERCICIO 6 (6 puntos)

La ecuación de estado más sencilla que existe es la ecuación de gas ideal $PV = nRT$, donde P es la presión del gas, V es el volumen, n es el número de moles, R es la constante universal de los gases (8.314 Pa·m^3/mol·K) y T es la temperatura absoluta. Escribir un programa en Scilab que calcule el número de moles de un gas, dados su presión, volumen y temperatura, empleando la ecuación de gas ideal. Para la corrida de prueba, tomar P = 0.8 atm, V = 2 m^3 y T = 25 °C.

RESPUESTA: 65.4 mol

EJERCICIO 7 (6 puntos)

La trayectoria de una bala de cañón, despreciando la fricción con el aire, obedece las ecuaciones del tiro parabólico. Si el cañón y su objetivo se encuentran a la misma altura, el alcance o rango R (distancia horizontal recorrida por el proyectil) está dado por:

$$R = \frac{{v_0}^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

donde v_0 es la velocidad inicial, θ es el ángulo de lanzamiento con respecto a la horizontal, y g es la aceleración de la gravedad. Escribir un programa en Scilab que calcule el alcance de la bala. Para la corrida de prueba, considerar el caso en el que la bala es disparada a 138.7 m/s con un ángulo de 37°.

RESULTADO: 1885.06 m

Unidad 2 – Estructuras de control, funciones y arreglos

EJERCICIO 8 (2 puntos)

Escribir un programa en Scilab que convierta una temperatura dada de °C a K. El programa debe calcular la temperatura y mostrar el resultado sólo si la temperatura es mayor o igual a −273.15 °C; en caso contrario, debe mostrar una advertencia al usuario. Para las corridas de prueba, usar 110 °C, −67 °C, y −310 °C.

EJERCICIO 9 (2 puntos)

Escribir un programa en Scilab que genere un número entero aleatorio entre 1 y 6. El programa debe luego pedir al usuario que adivine el número, y mostrar una respuesta apropiada dependiendo de si el usuario adivinó o no. Como corridas de prueba, incluir una en la que sí se haya adivinado y una en la que no.

EJERCICIO 10 (2 puntos)

Constantes para la ecuación de la viscosidad obtenidas de Reid, Prausnitz y Poling, "The Properties of Liquids and Gases", 4ª edición, McGraw-Hill.

La viscosidad de un líquido se puede expresar frecuentemente con una ecuación de la forma $\mu = AT^B$, donde la temperatura T está dada en kelvin y la viscosidad μ está en centipoise. Para el acetaldehído, las constantes son A = 5.14×10⁷ y B = −3.39, pero para este compuesto la ecuación sólo es válida en el intervalo de temperatura de 0 a 20 °C. Escribir un programa en Scilab que pida la temperatura en grados centígrados. Si la temperatura es **mayor o igual que 0 °C** y **menor o igual que 20 °C**, el programa debe calcular y reportar la viscosidad del acetaldehído a esa temperatura. Si no, debe mostrar un mensaje indicando que la temperatura no es válida. Como corridas de prueba, usar (**A**) 11 °C y (**B**) una temperatura, a su elección, que no esté en el intervalo de validez.

RESULTADO: (A) 0.2474 cP

EJERCICIO 11 (2 puntos)

El enésimo número armónico H_n (en inglés: *harmonic number*) es la suma de los recíprocos de los números naturales, desde 1 hasta n:

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad \text{o bien, como sumatoria} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Escribir un programa en Scilab que pida al usuario el valor de n y calcule el número armónico H_n. Para la corrida de prueba, usar $n = 1000$.

RESULTADO: 7.4854709

EJERCICIO 12 (4 puntos)

Adaptado de Gilat (2006), "Matlab: una introducción con ejemplos prácticos", Editorial Reverté.

π es una constante matemática irracional con un número infinito de dígitos, que no puede obtenerse como la división de dos números naturales. Sin embargo, puede estimarse a partir de la serie de Leibniz:

$$4\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

que converge al valor de π cuando m es un número muy grande. Escribir un programa en Scilab que emplee un ciclo **for** para calcular el valor de serie de Leibniz de acuerdo al valor de m dado por el usuario, y llenar la tabla siguiente:

$m =$	5	50	500	5000	5000000
resultado	2.9760462				

EJERCICIO 13 (4 puntos)

```
4 × 1 = 4
4 × 2 = 8
4 × 3 = 12
4 × 4 = 16
4 × 5 = 20
4 × 6 = 24
4 × 7 = 28
4 × 8 = 32
4 × 9 = 36
4 × 10 = 40
```

Una tabla de multiplicar es un recurso didáctico utilizado en educación básica para que los niños adquieran la habilidad numérica de multiplicar dos números. En este ejercicio, se utilizará un ciclo en Scilab para generar la tabla de multiplicar de un número entre 1 y 10. El **pseudocódigo** del programa es como sigue:

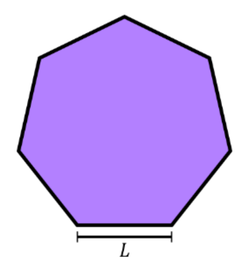
```
Preguntar a.
Si a está entre 1 y 10:
    Ciclo para b, de 1 a 10:
        Mostrar:  a × b = ab
Si no:
    Mostrar mensaje de error.
```

Para la corrida de prueba, usar el último dígito de su número de control (si es cero, usar 10).

EJERCICIO 14 (4 puntos)

El área de un heptágono regular con lados de longitud L está dada por:

$$A = \tfrac{1}{4} n L^2 \cot(\pi / n)$$



donde la cotangente es del ángulo en radianes. **Escribir una función en Scilab que use esta fórmula para calcular el área usando n y L como parámetros, y utilizarla en un programa que pida al usuario esos datos y reporte el resultado.** Para la corrida de prueba, calcular el área de un heptágono regular de 8.4 cm de lado.

RESULTADO: 256.40886 cm²

EJERCICIO 15 (4 puntos)

El **dodecahedro regular** es un sólido geométrico formado por 12 pentágonos regulares idénticos. Es uno de los cinco sólidos pitagóricos, los otros siendo el tetrahedro (formado por 4 triángulos), el cubo (6 cuadrados), el octahedro (8 triángulos) y el icosahedro (20 triángulos). Estos sólidos han sido estudiados ampliamente desde los tiempos de los antiguos griegos. Platón afirmaba que los cuatro elementos (tierra, agua, fuego y aire) estaban formados por cuatro de estos sólidos. El dodecahedro fue un caso especial: trataron de mantenerlo en secreto porque creían que era el constituyente del éter (el quinto elemento) del cual estaban formados los cielos.

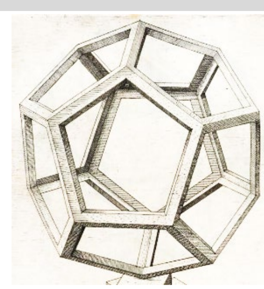


Imagen de *Perspectiva Corporum Regularium* (1568)

Si R es el radio de una esfera, el volumen del dodecahedro inscrito (es decir, que sólo toca a la esfera con sus vértices) está dado por:

$$V = \tfrac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right)L^3 \qquad \text{donde el lado de los pentágonos está dado por} \qquad L = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right)R$$

Escribir una función en Scilab que calcule el volumen de un dodecahedro usando como dato el radio de la esfera en la que está inscrito, y usarla en un programa para calcular el volumen del dodecahedro inscrito en una esfera de 15 cm de diámetro.

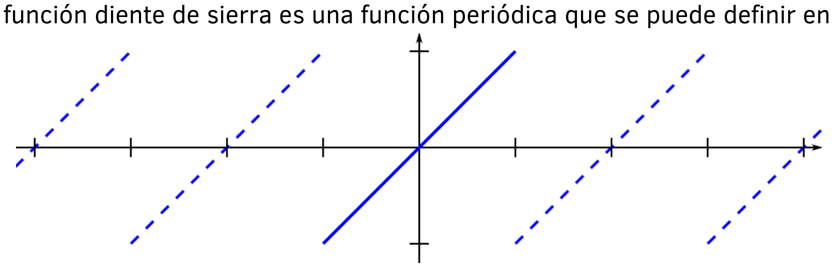
RESULTADO: 1174.99 cm³

EJERCICIO 16 (2 puntos)

Generar en Scilab la gráfica de $y = x\left(x^2 - 1\right)^3$ en el intervalo [−1.25,1.25]. Utilizar al menos 150 puntos en la gráfica.
SUGERENCIA: Definir el vector **x** usando **`linspace`** y luego calcular **y** empleando operaciones elemento por elemento.

EJERCICIO 17 (4 puntos)

La función diente de sierra es una función periódica que se puede definir en el intervalo $(-1,1)$ como:



$f(x) = x$ para $-1 \le x \le 1$
periódica con periodo $p = 2$

Para esta función, la N-ésima suma parcial de su serie de Fourier es la serie finita:

$$S_N = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n\pi x)}{n}$$

Escribir un programa en Scilab que genere la gráfica de esta suma parcial dado el valor de N. Usarlo para generar las gráficas correspondientes a los siguientes valores de N: 1, 3, 9 y 21. Para el eje horizontal de la gráfica, abarcar el intervalo [−3,3] con al menos 500 puntos.

Unidad 3 – Análisis del error y solución de ecuaciones

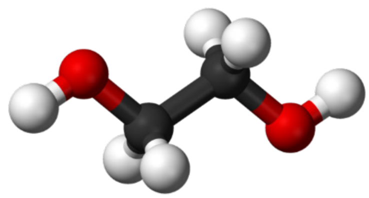
EJERCICIO 18 (6 puntos)

Adaptado de Carnahan (1969) "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons.

Se sabe que la función $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo [1,2]. Realizar **a mano y calculadora** por lo menos cinco iteraciones aplicando (**A**) el método de bisección, y (**B**) el método de la regla falsa. Redondear los resultados intermedios a seis cifras significativas y mostrar en su evidencia todos los cálculos y sustituciones. Calcular y reportar también el error relativo aproximado en cada iteración. En sus comentarios del ejercicio, comparar ambos métodos y discutir cuál redujo el error relativo más rápidamente.

EJERCICIO 19 (4 puntos)

Constantes para la ecuación de viscosidad tomadas de Perry & Green (2019) "Perry's Chemical Engineers' Handbook", 9th edition, McGraw-Hill.



El etilenglicol (1,2-etanodiol, HO–CH_2–CH_2–OH) es un líquido viscoso, incoloro, inodoro y de sabor dulce, que se emplea principalmente como materia prima en la fabricación de fibras textiles de poliéster y en mezclas anticongelantes. La viscosidad del etilenglicol puro está dada por la ecuación:

$$\ln \mu = -290.36 + \frac{14251}{T} + 42.486 \ln T - 4.0369 \times 10^{-5} T^2$$

con la temperatura está en kelvin y la viscosidad en Pa·s. Esta ecuación es válida para temperaturas entre 260 y 576 K. Usando el método de bisección, determinar la temperatura a la que el etilenglicol tiene una viscosidad de 5×10^{-4} Pa·s. Como intervalo inicial de búsqueda, utilizar el intervalo completo de validez de la ecuación, y usar una tolerancia al error relativo aproximado de 1×10^{-4}.

RESULTADO: 474.125 K

EJERCICIO 20 (6 puntos)

Resolver la ecuación $x^2 \ln(x) = 10$ aplicando: (**A**) la iteración de punto fijo despejando x del factor cuadrático, (**B**) la iteración de punto fijo despejando x del logaritmo, y (**C**) el método de Newton-Raphson. En los tres casos, usar $x_0 = 4$ como valor inicial, emplear por lo menos cinco cifras significativas en los calculos (incluir todas las sustituciones en la evidencia del ejercicio), calcular el error relativo aproximado en cada iteración y detener las iteraciones si el error relativo aproximado es menor a 0.1% o se hayan hecho 7 iteraciones. Mostrar todas las sustituciones en su evidencia. Comentar las diferencias entre los tres casos.

EJERCICIO 21 (4 puntos)

Resolver la ecuación $2e^{-0.5x} \operatorname{sen} x = -0.1$ aplicando el método de Newton-Raphson, con valor inicial $x_0 = 1.5$, usando una tolerancia al error relativo aproximado de 1×10^{-6}.

RESPUESTA: 3.4219727

EJERCICIO 22 (6 puntos)

Adaptado de Carnahan *et al.* (1969).

Resolver, por cálculo manual, el siguiente sistema de ecuaciones, utilizando (**A**) el método de Jacobi, y (**B**) el método de Gauss-Seidel. En ambos casos, utilizar como valor inicial $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ y $z_0 = 1$, emplear al menos cinco cifras significativas, calcular el error relativo aproximado en cada iteración, y realizar el número de iteraciones necesarias hasta que el error de las tres variables sea menor que 1%. Incluir en su evidencia todas las sustituciones y cálculos.

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 11 \\ -x + 2y &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 16 \end{aligned}$$

Unidad 4 – Interpolación, regresión y derivación

EJERCICIO 23 (4 puntos)

Escribir un programa en Scilab para interpolación lineal simple. El programa debe pedir los valores de x_1, y_1, x_2, y_2 y x, y calcular el valor interpolado mediante la fórmula:

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Para la corrida de prueba, determinar por interpolación lineal la entalpía del agua líquida saturada a 80 °C, con base en los siguientes datos:

T_{sat} (°C)	h_f (kJ/kg)
50	209.34
100	419.17

Datos de Çengel (2015).

RESULTADO: 335.238 kJ/kg

EJERCICIO 24 (4 puntos)

La tabla muestra la viscosidad (en centipoise) de soluciones de sacarosa al 20% en función de la temperatura. Empleando interpolación polinomial de Lagrange, estimar el valor de la viscosidad a 25 °C.

Temperatura (°C)	Viscosidad (cP)
0	14.82
10	9.83
20	6.22
35	3.78

RESULTADO: 4.988 cP

EJERCICIO 25 (10 puntos)

Adaptado de Spiegel (2008) "Schaum's Outline of Statistics".

Escribir un programa en Scilab para regresión lineal simple. El programa debe pedir el número de datos, usar ciclos para pedir los valores de x y y, y calcular m, b y R^2. Para la corrida de prueba, usar los datos de la tabla, que muestra la estatura y peso de 10 estudiantes.

estatura (m)	1.60	1.83	1.52	1.68	1.78	1.88	1.65	1.57	1.74	1.65
peso (kg)	68	81	61	71	76	81	73	60	66	63

RESPUESTA: $m = 58.099$, $b = -28.188$, $R^2 = 0.759$

EJERCICIO 26 (6 puntos)

Adaptado de Berthouex & Brown (2002) "Statistics for Environmental Engineers", 2nd edition, Lewis Publishers, que a su vez cita a Briggs & Gatter (1992) *ISA Trans.* 31, 111–123.

La demanda química de oxígeno (DQO) es un parámetro importante de la calidad del agua, que está relacionado con la cantidad de materia orgánica presente en el agua. Se suele expresar como la masa de oxígeno (en mg) que se necesitaría para oxidar completamente los compuestos orgánicos presentes en un litro de agua.

En el laboratorio de una planta de tratamiento de aguas, están explorando la posibilidad de determinar indirectamente la DQO mediante espectrofotometría. Para ello, midieron la absorbancia a 254 nm (UV) de varias muestras de agua, a las que se les determinó también la DQO (en mg/L) por el método estándar, a efecto de construir una curva de calibración para mediciones posteriores. Para los datos mostrados en la tabla, realizar en Excel una regresión lineal de la absorbancia en función de la DQO. Reportar la ecuación de la recta de regresión y el valor de R^2.

DQO	60	70	90	100	120	130	140	195	250	300	350	375	380	450	500	525	550	550	600	650	675
A	0.3	0.3	0.4	0.6	0.5	0.7	0.7	0.9	1.3	1.6	1.7	1.6	1.7	1.7	2.3	2.5	2.2	2.3	2.3	2.5	2.7

RESPUESTA: **A** = 0.00387×**DQO** + 0.165, $R^2 = 0.966$

Unidad 5 – Integración y solución de ecuaciones diferenciales

EJERCICIO 27 (8 puntos)

Datos adaptados de Wark (1991) "Termodinámica", 5ª edición, McGraw-Hill.

El trabajo realizado por un gas en expansión se obtiene integrando la presión con respecto al volumen, $w = \int P dv$. Los datos de la tabla muestran la presión de una cierta cantidad de dióxido de azufre gaseoso (SO_2) que se expande en un sistema cilindro-pistón. Aplicando la regla del trapecio de segmentos múltiples desiguales, determinar **a mano y calculadora** la cantidad de trabajo (en kJ/kg) realizado por el gas al expandirse desde 0.125 hasta 0.479 m³/kg. (NOTA: 1 kJ = 1 kPa·m³).

v (m³/kg)	0.125	0.150	0.187	0.268	0.479
P (kPa)	345	275	207	138	68

RESULTADO: 52.37 kJ/kg

EJERCICIO 28 (10 puntos)

La función e^{-x^2} tiene importante relación con la distribución de probabilidad normal (distribución gaussiana) y con la función error, que tiene aplicaciones importantes en matemáticas e ingeniería. Sin embargo, no se puede integrar de forma analítica en términos de funciones algebraicas o trascendentales básicas. Empleando (**A**) la regla de Simpson de 1/3 para tres puntos, y (**B**) la regla de Simpson de 3/8 para cuatro puntos, calcular el valor de siguiente integral:

$$\int_0^{1.5} e^{-x^2} dx$$

Calcular también el error relativo de ambas estimaciones, sabiendo que el valor exacto de la integral es **0.856188394**.

RESULTADOS: (A) 0.84613263, (B) 0.85226998

EJERCICIO 29 (8 puntos)

La tabla muestra el calor específico de soluciones acuosas de ácido clorhídrico al 20% en función de la temperatura. Aplicando la regla del trapecio, usando Excel, calcular la entalpía de esta solución a 60 °C (la temperatura de referencia es 0 °C).

$$h = \int_{T_{ref}}^{T} c_P dT$$

Temperatura (°C)	Calor específico (cal/g·°C)
0	0.580
10	0.575
20	0.591
40	0.615
60	0.638

(Perry, 7ª edición)

RESULTADO: 36.195 cal/g.

EJERCICIO 30 (6 puntos)

Resolver numéricamente la ecuación diferencial $y' + y = 10e^{-t}\cos(5t)$ desde el punto inicial $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ hasta el punto final $t_f = 3$, usando el método de Euler con tamaños de paso $h = 0.5, 0.05, 0.005$ y 0.0005. Reportar en la tabla siguiente el valor final de y obtenido por el método numérico y el error relativo porcentual de ese resultado, sabiendo que el **valor verdadero** de y en $t = 3$ es **0.06475185**. Generar también la gráfica de la solución numérica para cada valor de h. **¿A qué conclusión se llega respecto al comportamiento del error y su relación con el orden del método de Euler?**

tamaño de paso	valor final (y en $t = 3$)	error relativo porcentual
$h = 0.5$	0.2919339	350.85%
$h = 0.05$		
$h = 0.005$		
$h = 0.0005$		