



# Educación

Secretaría de Educación Pública



TECNOLÓGICO  
NACIONAL DE MÉXICO®

## TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO INSTITUTO TECNOLÓGICO DE DURANGO



Departamento de Ingenierías Química y Bioquímica

MANUAL DE APUNTES  
**“Mecanismos de Transferencia”**  
(REVISIÓN 3.1)

Elaboración:  
**Dr. Carlos Francisco Cruz Fierro**



ENLACE A LA VERSIÓN MÁS  
RECIENTE DE ESTE DOCUMENTO:  
<https://tinyurl.com/y2cwc6nw>

Durango, Dgo., México  
Abril 2026

# PRESENTACIÓN

## Contexto académico-curricular

En el estudio de la ingeniería química, se puede identificar varios grupos de cursos que marcan la progresión lógica de los conocimientos aprendidos. Es importante ubicar en primera instancia la materia de la que es objeto este manual de apuntes, así como su relación con materias anteriores y posteriores. A continuación, se muestra la retícula del plan de estudios por competencias 2010 de ingeniería química (IQUI-2010-232) del Tecnológico Nacional de México, donde se han señalado tres grupos de cursos.

SEMESTRE 1	SEMESTRE 2	SEMESTRE 3	SEMESTRE 4	SEMESTRE 5	SEMESTRE 6	SEMESTRE 7	SEMESTRE 8
Fundamentos de Investigación	Mecánica Clásica	Electricidad, Magnetismo y Óptica	Métodos Numéricos	Gestión de la Calidad			
Cálculo Diferencial	Cálculo Integral	Cálculo Vectorial	Ecuaciones Diferenciales	Taller de Investigación 1	Taller de Investigación 2	Taller de Administración Gerencial	
Programación	Álgebra Lineal	Análisis de Datos Experimentales	Mecanismos de Transferencia	Balance de Momentum, Calor y Masa	Procesos de Separación 2	Procesos de Separación 3	Simulación de Procesos
Dibujo Asistido por Computadora	Química Analítica	Termodinámica	Balance de Materia y Energía	Procesos de Separación 1	Laboratorio Integral 1	Laboratorio Integral 3	Síntesis y Optimización de Procesos
Química Inorgánica	Química Orgánica 1	Química Orgánica 2	Ingeniería Ambiental	Fisicoquímica 1	Fisicoquímica 2	Reactores Químicos	Instrumentación y Control
Taller de Ética	Salud y Seguridad en el Trabajo	Análisis Instrumental	Ingeniería de Costos	Desarrollo Sostenible		Laboratorio Integral 2	Ingeniería de Proyectos

■ Fundamentos de Ingeniería     
 ■ Operaciones Unitarias     
 ■ Ingeniería Química Aplicada  
 (por simplicidad, se omite módulo de especialidad, servicio social, residencia profesional y créditos complementarios)

En el primer grupo, *fundamentos de ingeniería*, se ubican los cursos que proporcionan las bases teóricas sobre el comportamiento de la materia y la energía a nivel microscópico y macroscópico. Dentro de este grupo se encuentran los dos cursos que colectivamente se conocen como **fenómenos de transporte**: “Mecanismos de Transferencia” y “Balance de Momentum, Calor y Masa”. El primero presenta principalmente la base conceptual, mientras que el segundo desarrolla el aspecto matemático, del comportamiento de tres propiedades físicas fundamentales en la ingeniería química: momentum, calor y masa.

En el segundo grupo, *operaciones unitarias* se estudian los componentes individuales de un proceso, donde se llevan a cabo las transformaciones de la materia que permiten el ensamble de procesos químicos completos. En cada operación unitaria, se presenta internamente un cambio en una o más de esas tres propiedades, por lo que para su comprensión es necesario contar con una sólida base de fundamentos de ingeniería.

En el tercer grupo, *ingeniería química aplicada*, se integran los conocimientos de las operaciones unitarias individuales en el diseño de procesos químicos completos.

Con esta perspectiva, es fácil reconocer la importancia de todas las materias que constituyen el bloque de *fundamentos de ingeniería*, ya que son los cimientos sobre los cuales se edifica el aprendizaje subsecuente de la ingeniería química.

Tradicionalmente, fenómenos de transporte se ha reconocido como un tópico difícil de asimilar por parte de los estudiantes, ya que los conceptos presentados representan un paso avanzado (incluso a veces desconectado) de la experiencia cotidiana. A lo largo de los años, se han escrito muchos libros en este tema, ya sea abarcando las tres propiedades físicas, o concentrándose en una (mecánica de fluidos, transferencia de calor o transferencia de masa). Destaca el trabajo seminal de Bird, Stewart y Lightfoot, "Fenómenos de Transporte", publicado en 1960, y que se mantuvo vigente por más de 40 años antes de requerir una segunda edición. Sin embargo, su tratamiento fuertemente matemático (como muchos otros libros en esta área) suele desalentar a los estudiantes que comienzan a familiarizarse con esta parte fundamental de la ingeniería química.

De ahí surge la iniciativa de preparar un manual de apuntes para este curso, que permita presentar, en forma compacta pero exhaustiva, los conceptos fundamentales de este curso "Mecanismos de Transferencia", sin abrumar aún al alumno con el análisis matemático que será el punto central del curso siguiente, "Balance de Momentum, Calor y Masa".

### *Perspectiva histórica*

El nombre en sí, *Fenómenos de Transporte*, inspira diferentes reacciones en el alumno, variando drásticamente desde simple extrañeza hasta franco temor. Esta denominación se puede considerar un reflejo del origen histórico de esta rama de los fundamentos de ingeniería.

Desde la antigüedad, se estudió *fenomenológicamente* el comportamiento de la naturaleza; es decir, se podía describir lo que sucedía, pero no se podía explicar el por qué. Se sabía que el agua salía por un orificio en el fondo de un recipiente y que, entre mayor fuera el nivel de agua en el recipiente, más rápido salía el agua. Se sabía que una pieza de metal colocada en las brasas se calentaba gradualmente, y que cuando estaba muy caliente brillaba con luz propia, al igual que las brasas. Se sabía que un charco de agua se secaba después de un tiempo, más rápido en verano, y más rápido aún si soplaban viento. Todas éstas eran observaciones de los fenómenos que ocurrían en la vida cotidiana, aunque inicialmente no se sabía a qué se debían.

Con el progreso científico, se fueron desarrollando las bases que dieron origen a una serie de disciplinas que explicaban estos fenómenos: mecánica de fluidos, termodinámica, etcétera. Se demostró que la presión en el fondo de un recipiente aumentaba al aumentar el nivel de líquido, y que esta mayor presión era la que hacía que el líquido saliera con mayor velocidad. Se comprendió que el calor, al pasar de las brasas calientes al metal frío, ocasionaba el calentamiento de éste. Se estudió la radiación electromagnética de cuerpo negro, y con ello la explicación de por qué los objetos calientes emitían luz visible. A su vez, el concepto de humedad de saturación, que es función de la temperatura, permitió entender por qué un charco de agua se secaba más rápido en verano que en invierno.

Gradualmente se fue hablando de ciertas propiedades físicas, y se explicaron dichos fenómenos en términos de la transferencia o *transporte* de dichas propiedades. La fuerza de gravedad origina la presión en el fondo de un recipiente, y ésta a su vez origina el momentum implícito en el movimiento del fluido. La energía presente en las brasas es conducida a través del metal y causa su calentamiento. El charco se seca porque las moléculas del agua pasan al estado gaseoso, ya que el aire que lo rodea no está saturado de vapor de agua.

Al profundizarse el estudio de estos tópicos, se volvió evidente una similitud matemática entre ellos. Las ecuaciones diferenciales que representaban las fuerzas en un fluido en movimiento, la distribución de temperatura en un objeto sólido, la variación de concentración de un punto a otro en un sistema, eran sorprendentemente parecidos. En ocasiones, la solución matemática de dichas ecuaciones, obtenida para un caso en particular, podía ser aplicada con mínimos cambios a otro caso aparentemente diferente.

Más aún, se reconoció que la similitud se debía también al hecho de que los mecanismos subyacentes eran similares. Las moléculas en una sustancia están en constante movimiento, por lo que tienen momentum y energía cinética, así como su identidad química que las distingue de otras sustancias. Un fluido en movimiento tiene momentum, y puede

a su vez acarrear consigo energía y sustancias químicas. Todo esto llevó a que se unificara el estudio de estas tres propiedades dentro del mismo tópico, surgiendo así *Fenómenos de Transporte* como se le conoce actualmente.

### Comentarios sobre el contenido temático

La edición original de este documento se llevó a cabo durante el año sabático del autor, de 2015 a 2016. Para el propósito de dicho año sabático, la organización del contenido necesariamente se apegaba al temario del plan de estudios oficial, que es el resultado de las reuniones de seguimiento curricular realizadas por el Tecnológico Nacional de México. En una materia de perspectiva tan amplia como ésta, a la vez importante y compleja, difícilmente se puede considerar que un tema ha sido agotado o que se ha expuesto en la mejor forma posible. En revisiones subsecuentes, ha sido la opinión del autor hacer ciertos cambios en el orden o en el contenido de los temas, al descubrir oportunidades de mejora y extensión en este documento. En cualquier caso, se ha buscado privilegiar el beneficio hacia el estudiante.

Partes del contenido de este manual de apuntes han sido adaptadas para emplear consistentemente simbología y/o sistema de unidades, para facilitar la aplicación de las ecuaciones, o para conciliar en lo posible discrepancias entre las diversas fuentes consultadas.

Los ejemplos insertados en el texto, así como los ejercicios incluidos en el anexo, han sido recopilados de diversas fuentes a lo largo de los años. En algunos casos, por omisión involuntaria, no se cita la fuente; en otros casos, son contribuciones originales del autor.

En la solución de los ejemplos, se procuró una exposición tan detallada como fuera posible, sin que su extensión fuera excesiva. Algunos pasos se omiten cuando sean obvios. También se omite la sustitución de unidades cuando se trabaja con correlaciones empíricas, ya que su cancelación depende de las unidades ocultas en las constantes de la ecuación.

Los ejercicios propuestos, más que pretender ser exhaustivos, aspiran sólo a ser una muestra representativa de la variedad de planteamientos que se pueden presentar en estos tópicos, y pueden ser un punto de partida para el desarrollo de material didáctico adicional en un futuro próximo.

Se ha hecho lo posible por verificar y validar todo el material aquí presentado. Sin embargo, no es posible dar una garantía absoluta, explícita o implícita, sobre la exactitud de la información contenida en este manual de apuntes. Por lo tanto, no se recomienda su uso en la preparación de diseños finales de equipos industriales, procesos químicos, o sistemas de viaje a través del tiempo. En estos casos, se recomienda consultar las fuentes bibliográficas pertinentes.

### Características tipográficas

Se prestó particular atención al diseño tipográfico del documento, buscando equilibrar eficiencia y estética. Para el texto principal se seleccionó el tipo de letra *Clear Sans*, que permite emplear un tamaño de letra relativamente pequeño sin sacrificar claridad y facilidad de lectura. Para los títulos se usó el tipo de letra *Lora*, buscando distinguirlos del texto general, pero armonizando a la vez con éste. Las ecuaciones y símbolos matemáticos se presentan en el tipo de letra *Cambria*, que les permite resaltar claramente identificándose dentro del texto. Los símbolos de los grupos adimensionales, generalmente formados por dos letras, destacan claramente al presentarlos en *Century 725 Condensed*.

El texto va en una sola columna, con márgenes estrechos, para maximizar la información contenida por página. La solución a los ejemplos, salvo ocasionales excepciones, se presenta a dos columnas en un tamaño de letra 85% menor, para optimizar el uso de espacio y distinguirse claramente del texto principal.

El final del desarrollo de cada ejemplo se marca con el símbolo ■ con la misma implicación semántica que las siglas Q.E.D. (de la locución latina *quod erat demonstrandum*, “lo que se quería demostrar”). Por mucho tiempo, ésta ha sido la forma tradicional de señalar el fin de la demostración de un teorema matemático. Aún cuando la mayoría de los ejemplos no implican una demostración, sino un cálculo como su finalidad principal, se consideró adecuado el uso de este símbolo para señalar el fin de dicho desarrollo.

# ÍNDICE GENERAL

Presentación.....	ii
Índice general .....	v
Índice de figuras .....	viii
Índice de tablas .....	x
Notación .....	xi
<b>I. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Fluido y flujo .....	1
1.1.1 Definición de fluido .....	1
1.1.2 Clasificación de los flujos .....	2
1.2 Temperatura y calor .....	3
1.3 Composición química .....	5
1.3.1 Concentraciones .....	5
1.3.2 Fracciones.....	6
1.3.3 Densidad de flujo.....	7
1.3.4 Velocidad media de flujo.....	8
1.4 Mecanismos de transferencia.....	8
1.4.1 Mecanismos de transferencia de momentum .....	9
1.4.2 Mecanismos de transferencia de calor.....	10
1.4.3 Mecanismos de transferencia de masa .....	10
<b>II. ANÁLISIS DIMENSIONAL .....</b>	<b>12</b>
2.1 Sistema Internacional de Unidades .....	12
2.2 Técnicas de análisis dimensional .....	15
2.2.1 Método de Rayleigh.....	15
2.2.2 Método pi de Buckingham .....	17
2.2.3 Adimensionalización de una ecuación.....	19
2.3 Grupos adimensionales y correlaciones.....	21
2.3.1 Fuerzas impulsoras .....	22
2.3.2 Correlaciones .....	24
2.4 Similitud y escalamiento .....	28
2.4.1 Similitud geométrica.....	28
2.4.2 Similitud cinemática.....	29
2.4.3 Similitud dinámica.....	30

2.4.4	Escalamiento .....	31
<b>III. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM.....</b>		<b>34</b>
3.1	Transporte viscoso .....	35
3.1.1	Descripción del transporte viscoso .....	35
3.1.2	Ejemplos de transporte viscoso .....	36
3.1.3	Ley de Newton de la viscosidad .....	38
3.1.4	Algunos métodos de estimación para viscosidad .....	44
3.1.5	Reología .....	59
3.1.6	Clasificación reológica de los fluidos .....	59
3.1.7	Modelos reológicos .....	63
3.2	Arrastre y sustentación.....	64
3.2.1	Fuerza de arrastre.....	64
3.2.2	Fuerza de sustentación.....	66
<b>IV. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR .....</b>		<b>67</b>
4.1	Conducción .....	68
4.1.1	Ley de Fourier de la conducción .....	68
4.1.2	Algunos métodos de estimación para conductividad térmica .....	71
4.2	Convección.....	83
4.2.1	Ley de Newton del enfriamiento .....	84
4.2.2	Coefficiente de transferencia de calor por convección.....	85
4.2.3	Convección libre y convección forzada .....	85
4.2.4	Correlaciones para la estimación del coeficiente de transferencia de calor por convección.....	86
4.3	Radiación.....	91
4.3.1	Espectro electromagnético .....	91
4.3.2	Cuerpo negro.....	93
4.3.3	Ley de Planck.....	93
4.3.4	Ley de Stefan-Boltzmann .....	94
4.3.5	Cuerpo gris .....	96
4.3.6	Transferencia de calor por radiación entre dos objetos .....	96
<b>V. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE MASA .....</b>		<b>107</b>
5.1	Difusión .....	107
5.1.1	Ley de Fick de la difusión .....	107
5.1.2	Ecuación general de flujo .....	110

---

---

5.1.3	Tres casos de transferencia de masa en sistema binario .....	112
5.1.4	Algunos métodos de estimación para difusividad.....	113
5.2	Convección de masa .....	128
5.2.1	Coficiente(s) de transferencia de masa .....	129
5.2.2	Correlaciones para la estimación del coeficiente de transferencia de masa por convección.....	131
<b>REFERENCIAS.....</b>		<b>135</b>
<b>MISCELÁNEA DE EJERCICIOS.....</b>		<b>137</b>
<b>MATERIAL ADICIONAL .....</b>		<b>149</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Tipos de esfuerzo .....	1
Figura 1.2	Un sólido sujeto a un esfuerzo tangencial .....	1
Figura 1.3	Un líquido sujeto a un esfuerzo tangencial .....	2
Figura 1.4	Experimento de Reynolds .....	3
Figura 1.5	Regímenes de flujo en el experimento de Reynolds .....	3
Figura 1.6	Efecto de la distancia en el gradiente de temperatura.....	4
Figura 1.7	Comparación entre concentraciones molar y másica .....	5
Figura 1.8	Ejemplo del concepto de presión parcial.....	7
Figura 2.1	El número adimensional $\pi$ como el resultado de dividir dos longitudes.....	21
Figura 2.2	Ejemplo de correlación gráfica: diagrama de compresibilidad.....	25
Figura 2.3	Ejemplo de correlación gráfica: coeficiente de arrastre.....	26
Figura 2.4	Prototipo a escala reducida de una aeronave .....	28
Figura 2.5	Similitud geométrica .....	29
Figura 2.6	Similitud cinemática.....	30
Figura 2.7	Similitud dinámica.....	31
Figura 3.1	Transporte viscoso: fluido inicialmente en reposo .....	35
Figura 3.2	Transporte viscoso: placa superior en movimiento.....	35
Figura 3.3	Transporte viscoso: segunda capa en movimiento.....	36
Figura 3.4	Transporte viscoso: momentum pasando de capa en capa.....	36
Figura 3.5	Transporte viscoso: perfil de velocidades .....	36
Figura 3.6	Transporte viscoso en el flujo de Couette .....	37
Figura 3.7	Transporte viscoso en el flujo de Poiseuille .....	37
Figura 3.8	Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas rectangulares.....	38
Figura 3.9	Flujo con velocidad uniforme .....	39
Figura 3.10	Flujo con velocidad no uniforme .....	39
Figura 3.11	Deducción del gradiente de velocidad.....	39
Figura 3.12	Observación empírica de la ley de Newton .....	41
Figura 3.13	Deducción a nivel microscópico de la ley de Newton de la viscosidad.....	41
Figura 3.14	Diagrama esfuerzo – deformación para fluidos newtonianos.....	43
Figura 3.15	Potencial de Lennard-Jones .....	45
Figura 3.16	Diagrama de viscosidad reducida .....	51
Figura 3.17	Comportamiento de fluidos independientes del tiempo .....	61
Figura 3.18	Comportamiento de fluidos dependientes del tiempo .....	62
Figura 3.19	Esfera inmersa en un fluido en movimiento .....	64

Figura 3.20	Arrastre viscoso: perfil de velocidad del fluido cerca de la superficie.....	64
Figura 3.21	Arrastre viscoso: fuerzas sobre la superficie y su resultante.....	65
Figura 3.22	Arrastre de forma: conservación de energía del fluido.....	65
Figura 3.23	Arrastre de forma: fuerzas de presión y su resultante.....	66
Figura 3.24	Sustentación: conservación de energía del fluido.....	66
Figura 3.25	Sustentación: fuerzas de presión y su resultante.....	66
Figura 4.1	Observación empírica de la ley de Fourier.....	68
Figura 4.2	Deducción a nivel microscópico de la ley de Fourier.....	69
Figura 4.3	Diagrama de conductividad reducida.....	74
Figura 4.4	La convección como fenómeno combinado de conducción y advección.....	84
Figura 4.5	Espectro electromagnético.....	92
Figura 4.6	Ley de Planck.....	94
Figura 4.7	Ángulo sólido en coordenadas esféricas.....	96
Figura 4.8	Deducción de la ley del coseno de Lambert.....	97
Figura 4.9	Deducción del factor de visión entre dos cuerpos negros.....	99
Figura 4.10	Factor de visión para rectángulos perpendiculares con un lado en común.....	101
Figura 4.11	Factor de visión para rectángulos idénticos en planos paralelos.....	101
Figura 4.12	Factor de visión para discos en planos paralelos.....	102
Figura 5.1	Observación empírica de la ley de Fick.....	107
Figura 5.2	Deducción a nivel microscópico de la ley de Fick.....	108
Figura 5.3	Diagrama de estados correspondientes para difusividad.....	120
Figura 5.4	La convección de masa como combinación de difusión y advección.....	129

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.1	Mecanismos de transferencia.....	9
Tabla 2.1	Constantes físicas base para definir el Sistema Internacional.....	13
Tabla 2.2	Dimensiones fundamentales del Sistema Internacional .....	13
Tabla 2.3	Dimensiones de algunas cantidades físicas .....	14
Tabla 2.4	Algunos grupos adimensionales en ingeniería química y sus fuerzas impulsoras .....	23
Tabla 2.5	Ejemplos de correlaciones del coeficiente de arrastre para esferas.....	26
Tabla 2.6	Ejemplos de correlaciones en transferencia de calor.....	27
Tabla 2.7	Ejemplos de correlaciones en transferencia de masa .....	27
Tabla 2.8	Algunos números adimensionales empleados para similitud dinámica .....	31
Tabla 3.1	Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades para estimación de viscosidad .....	45
Tabla 3.2	Integral de colisión para viscosidad .....	47
Tabla 3.3	Estimación de los parámetros de Lennard-Jones .....	47
Tabla 3.4	Viscosidad en el punto crítico .....	51
Tabla 3.5	Clasificación de los fluidos no newtonianos .....	60
Tabla 4.1	Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades para estimación de conductividad térmica .....	71
Tabla 4.2	Integral de colisión para conductividad térmica .....	72
Tabla 4.3	Conductividad térmica en el punto crítico .....	75
Tabla 4.4	Valores típicos del coeficiente de transferencia de calor.....	85
Tabla 4.5	Algunas correlaciones para convección forzada en flujo externo.....	87
Tabla 4.6	Algunas correlaciones para convección forzada en flujo interno .....	87
Tabla 4.7	Algunas correlaciones para convección libre en flujo interno.....	88
Tabla 4.8	Espectro electromagnético.....	92
Tabla 5.1	Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades para estimación de difusividad .....	114
Tabla 5.2	Estimación de los parámetros de Lennard-Jones.....	115
Tabla 5.3	Integral de colisión para difusividad .....	116
Tabla 5.4	Contribuciones de grupo para volúmenes moleculares de difusión .....	117
Tabla 5.5	Volúmenes moleculares de difusión para algunas moléculas simples .....	118
Tabla 5.6	Conductancias iónicas límite para iones en agua a 25 °C.....	126
Tabla 5.7	Diversas formas de la ecuación de transferencia de masa, según el sistema usado para la composición.....	130
Tabla 5.8	Algunas correlaciones para la convección de masa.....	132

## NOTACIÓN

Inevitablemente, algunos símbolos se tuvieron que emplear de forma repetida para representar diferentes cantidades físicas. En estos casos, el contexto debe ser suficiente para identificar qué representan. Además, algunos símbolos no se incluyeron en esta tabla, por ser de uso exclusivo en algún tema en particular, pero se definen en el cuerpo del documento. Tampoco se incluyen símbolos que representan esencialmente la misma propiedad física pero que se distinguen con subíndices cuyo significado es obvio (por ejemplo,  $T_1$  y  $T_2$  para dos temperaturas diferentes).

Excepto si se indica en el texto, las cantidades vectoriales se representan en negrita (por ejemplo, la velocidad  $\mathbf{v}$ ), su magnitud se representa en cursiva ( $v \equiv |\mathbf{v}|$ ) y sus componentes se indican con subíndices ( $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$ ).

Los grupos adimensionales listados en la Tabla 2.4 no se incluyeron aquí para evitar repetición innecesaria.

Las unidades indicadas en la tabla corresponden en su mayoría al Sistema Internacional. En algunas ocasiones, los cálculos en la solución de algún ejemplo o ejercicio pueden requerir el uso de otras unidades dimensionalmente equivalentes. Además, los métodos de estimación de propiedades físicas en las unidades 3, 4 y 5 generalmente emplean correlaciones dimensionales en las que se debe sustituir los datos empleando las unidades indicadas por el método.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$A$	Área	$m^2$
$a$	Aceleración	$m/s^2$
$C$	Concentración molar total	$mol/m^3$
$C_i$	Concentración molar de un componente	$mol/m^3$
$c$	Velocidad de la luz, $2.99792458 \times 10^8$ m/s	$m/s$
$c_p$	Capacidad calorífica a presión constante	$J/mol \cdot K$
$c_v$	Capacidad calorífica a volumen constante	$J/mol \cdot K$
$D$	Diámetro	$m$
$\mathcal{D}_{AB}$	Difusividad de A en B	$m^2/s$
$\mathcal{D}_{AB}^0$	Difusividad de A a dilución infinita en B	$m^2/s$
$E_\lambda$	Densidad de flujo espectral (irradiancia espectral)	$W/m^3$
$F$	Fuerza	$N$
$F$	Constante de Faraday, 96500 C/eq	$C/eq$
$F_{1-2}$	Factor de visión de la superficie 1 a la superficie 2	-
$g$	Gravedad	$m/s^2$
$h$	Coefficiente de transferencia de calor	$W/m^2 \cdot K$
$h$	Constante de Planck, $6.026 \times 10^{-34}$ J·s	$J \cdot s$
$\mathbf{j}_i$	Densidad de flujo molar de un componente por difusión	$mol/m^2 \cdot s$
$\mathbf{j}_i^{(m)}$	Densidad de flujo másico de un componente por difusión	$kg/m^2 \cdot s$
$k$	Conductividad térmica	$W/m \cdot K$

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$k_c$	Conductividad térmica en el punto crítico	W/m·K
$k_C$ $k_C^0$	Coficiente de transferencia de masa, fase gaseosa, concentración molar como fuerza impulsora (DUM y CDEM, respectivamente)	m/s
$k_G$ $k_G^0$	Coficiente de transferencia de masa, fase gaseosa, presión parcial como fuerza impulsora (DUM y CDEM, respectivamente)	mol/Pa·m <sup>2</sup> ·s
$k_L$ $k_L^0$	Coficiente de transferencia de masa, fase líquida, concentración molar como fuerza impulsora (DUM y CDEM, respectivamente)	m/s
$k_m$	Conductividad térmica de la mezcla	W/m·K
$k_r$	Conductividad térmica reducida, $k_r = k / k_c$	-
$k_x$ $k_x^0$	Coficiente de transferencia de masa, fase líquida, fracción mol como fuerza impulsora (DUM y CDEM, respectivamente)	mol/m <sup>2</sup> ·s
$k_y$ $k_y^0$	Coficiente de transferencia de masa, fase gaseosa, fracción mol como fuerza impulsora (DUM y CDEM, respectivamente)	mol/m <sup>2</sup> ·s
$L$	Longitud (característica)	m
$M$	Peso molecular	g/mol
$N$	Número de componentes en la mezcla	-
$n$	Número de moles	mol
$\mathbf{n}_i$	Densidad de flujo molar total de un componente	mol/m <sup>2</sup> ·s
$\mathbf{n}_i^{(m)}$	Densidad de flujo másico total de un componente	kg/m <sup>2</sup> ·s
$P$	Presión	bar
$P_c$	Presión crítica	bar
$P_r$	Presión reducida, $P_r = P / P_c$	-
$P_{vap}$	Presión de vapor	bar
$P$	Perímetro	m
$\mathbb{P}$	Paracoro, $\mathbb{P} \equiv \tilde{V}\sigma^{1/4}$	g <sup>1/4</sup> ·cm <sup>3</sup> /mol·s <sup>1/2</sup>
$\mathbf{p}$	Momentum, $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$	kg·m/s
$Q$	Flujo de calor	W
$\mathbf{q}$	Densidad de flujo de calor	W/m <sup>2</sup>
$q_{conv}$	Densidad de flujo de calor por convección	W/m <sup>2</sup>
$q_b$	Densidad de flujo de calor por radiación de cuerpo negro	W/m <sup>2</sup>
$q_{b\perp}$	Densidad de flujo de calor emitido normal a la superficie	W/m <sup>2</sup>
$q_{b,\theta}$	Densidad de flujo de calor emitido a un ángulo $\theta$	W/m <sup>2</sup>
$R$	Constante universal de los gases, 8.314 J/mol·K	J/mol·K
$R$	Radio	m
$r$	Distancia radial	m

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$S$	Superficie	$m^2$
$T$	Temperatura	K
$T_b$	Temperatura de ebullición normal (1 atm)	K
$T_{br}$	Temperatura de ebullición reducida, $T_{br} = T_b / T_c$	-
$T_c$	Temperatura crítica	K
$T_m$	Punto de fusión normal (1 atm)	K
$T_r$	Temperatura reducida, $T_r = T / T_c$	-
$T_s$	Temperatura del sólido	K
$T_\infty$	Temperatura del fluido (infinitamente lejos)	K
$V$	Volumen	$m^3$
$\dot{V}$	Flujo volumétrico, caudal	$m^3/s$
$\tilde{V}$	Volumen molar	$cm^3/mol$
$\tilde{V}_b$	Volumen molar de líquido saturado en el punto de ebullición	$cm^3/mol$
$\tilde{V}_c$	Volumen molar en el punto crítico	$cm^3/mol$
$\tilde{V}_m$	Volumen molar de sólido en el punto de fusión	$cm^3/mol$
$\mathbf{v}$	Velocidad	m/s
$\mathbf{v}_i$	Velocidad de un componente	m/s
$\mathbf{v}^*$	Velocidad promedio molar	m/s
$w$	Fracción peso	-
$x$	Fracción mol (en fase líquida)	-
$y$	Fracción mol (en fase gaseosa)	-
$Z$	Factor de compresibilidad	-
$Z_c$	Factor de compresibilidad en el punto crítico	-
$z$	Valencia del ión	-
$\alpha$	Difusividad térmica, $\alpha = k / \rho c_p$	$m^2/s$
$\dot{\gamma}$	Rapidez de deformación	$s^{-1}$
$\varepsilon$	Energía característica	J
$\varepsilon$	Emisividad	-
$\varepsilon$	Efectividad de la aleta	-
$\eta$	Viscosidad aparente	Pa·s
$\eta$	Eficiencia de la aleta	-
$\theta$	Ángulo	rad
$\kappa$	Constante de Boltzmann, $1.38066 \times 10^{-23}$ J/K	J/K

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$\lambda$	Longitud de onda	m
$\lambda_{\max}$	Longitud de onda a la cual se emite el máximo de radiación	m
$\lambda^0$	Conductancia iónica límite	cm <sup>2</sup> /Ω·eq
$\mu$	Viscosidad	Pa·s
$\mu_c$	Viscosidad en el punto crítico	Pa·s
$\mu_m$	Viscosidad de la mezcla	Pa·s
$\mu_r$	Viscosidad reducida, $\mu_r = \mu / \mu_c$	-
$\mu$	Momento dipolo	debye
$\nu$	Viscosidad cinemática, $\nu = \mu / \rho$	m <sup>2</sup> /s
$\nu$	Frecuencia	s <sup>-1</sup>
$\rho$	Densidad	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_c$	Densidad crítica	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_i$	Concentración másica de un componente	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_r$	Densidad reducida, $\rho_r = \rho / \rho_c$	-
$\sigma$	Diámetro de colisión	Å
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann, $5.67 \times 10^{-8}$ W/m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup>	W/m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup>
$\sigma$	Tensión superficial	N/m
$\tau$	Esfuerzo	Pa
$\phi$	Ángulo	rad
$\phi$	Fracción volumen	-
$\omega$	Factor acéntrico	-
$\omega$	Velocidad angular	rad/s
$\Omega_\mu$	Integral de colisión para viscosidad	-
$\Omega_k$	Integral de colisión para conductividad térmica	-
$\Omega_{\mathcal{D}}$	Integral de colisión para difusividad	-
$\nabla$	Gradiente	m <sup>-1</sup>
$\nabla C_i$	Gradiente de concentración molar de un componente	mol/m <sup>4</sup>
$\nabla T$	Gradiente de temperatura	K/m
$\nabla \mathbf{v}$	Gradiente de velocidad	s <sup>-1</sup>
$\nabla \rho_i$	Gradiente de concentración másica de un componente	kg/m <sup>4</sup>
■	Q.E.D., <i>quod erat demonstrandum</i> ("lo que se quería demostrar").	

# I. INTRODUCCIÓN

## 1.1 Fluido y flujo

### 1.1.1 Definición de fluido

De la experiencia cotidiana, se puede identificar un fluido como un material que “fluye”, en contraste con un sólido que “no fluye”. Debido a esta característica, los fluidos toman la forma del recipiente que los contiene. Los fluidos abarcan por lo tanto a los líquidos y los gases. Sin embargo, como se verá más adelante, la distinción entre fluido y sólido no siempre es tan clara, y es necesario proporcionar una definición más precisa de lo que es un fluido.

Para entender qué es un fluido, primero se debe definir el **esfuerzo**, que es la fuerza dividida entre el área sobre la que se aplica (su unidad en el Sistema Internacional es el pascal,  $\text{Pa} \equiv \text{N}/\text{m}^2$ ). El efecto de la fuerza es diferente si se aplica perpendicularmente a la superficie (esfuerzo normal) o paralelamente a la superficie (esfuerzo tangencial o cortante), como se muestra en la Figura 1.1. En este punto es fácil reconocer que la presión es un esfuerzo de tipo normal.



Figura 1.1 Tipos de esfuerzo.

Considérese primero un sólido, como puede ser un bloque de piedra, fijo entre dos placas (Figura 1.2). Al aplicar un esfuerzo tangencial, el sólido se deforma parcialmente, sólo una cierta distancia, que depende de la magnitud de la fuerza aplicada. Si posteriormente se deja de aplicar el esfuerzo, el sólido regresará a su forma original, siempre que no se haya superado el límite elástico del material.

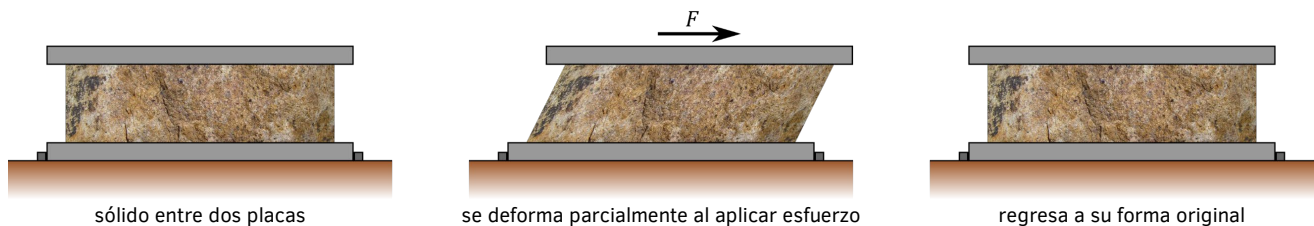
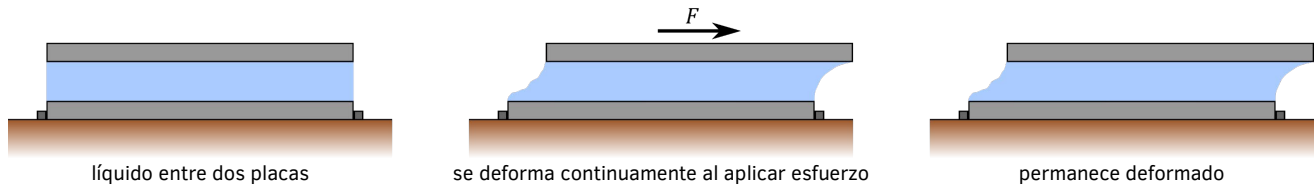


Figura 1.2 Un sólido sujeto a un esfuerzo tangencial.

(la deformación se ha exagerado con fines ilustrativos)

Ahora considérese un líquido colocado entre las mismas dos placas (Figura 1.3). El líquido también se deformará cuando se le aplique el esfuerzo tangencial, pero esta deformación no es parcial, sino que continuará deformándose mientras la fuerza esté presente (a diferencia del sólido que sólo se deformó una cierta distancia). Además, cuando se deja de aplicar el esfuerzo, el líquido no regresará a su forma original, sino que permanecerá deformado.



**Figura 1.3** Un líquido sujeto a un esfuerzo tangencial.

Contrastando estas observaciones del comportamiento de un sólido y un líquido, se puede dar la siguiente definición:

- ★ **Fluido:** Es cualquier material que se deforma continua y permanentemente cuando se le aplica un esfuerzo tangencial.

De esta definición se puede obtener también una conclusión muy importante: *en un fluido en reposo sólo pueden existir esfuerzos normales, pero no esfuerzos tangenciales*. Si hubiera un esfuerzo tangencial, el fluido comenzaría a deformarse (moverse) y por lo tanto ya no estaría en reposo.

### 1.1.2 Clasificación de los flujos

Un flujo es simplemente un fluido en movimiento. Los flujos se pueden clasificar de acuerdo a diversos criterios.

- ★ Respecto a variaciones en el *espacio*:
  - **Flujo uniforme:** Es el que presenta la misma velocidad en todos los puntos.
  - **Flujo no uniforme:** La velocidad del fluido es diferente de un punto a otro.
- ★ Respecto a variaciones en el *tiempo*:
  - **Flujo estable:** No cambia con respecto al tiempo. También llamado *estacionario* o *permanente*.
  - **Flujo transitorio:** Sí cambia con respecto al tiempo. También llamado *no permanente*.
- ★ Respecto a variaciones de *densidad*:
  - **Flujo incompresible:** La densidad es la misma en todos los puntos.
  - **Flujo compresible:** La densidad varía de un lugar a otro.
- ★ Respecto al *régimen*:
  - **Flujo laminar:** El fluido se mueve en capas ordenadas, sin que haya mezcla entre ellas.
  - **Flujo de transición:** El flujo es menos ordenado, con fluctuaciones, pero sin haber mezcla completa.
  - **Flujo turbulento:** El fluido se mueve de forma caótica en todas direcciones, formando remolinos y mezclándose completamente.

Esta última clasificación es muy importante en mecánica de fluidos, y la estableció Osborne Reynolds a finales del siglo XIX. En su famoso experimento (Figura 1.4), Reynolds utilizó un tubo capilar para inyectar tinta en una corriente de agua que circulaba a través una tubería transparente, de forma que se visualizara el comportamiento del flujo. La velocidad del agua en la tubería se controlaba con una válvula instalada en el extremo de la tubería.

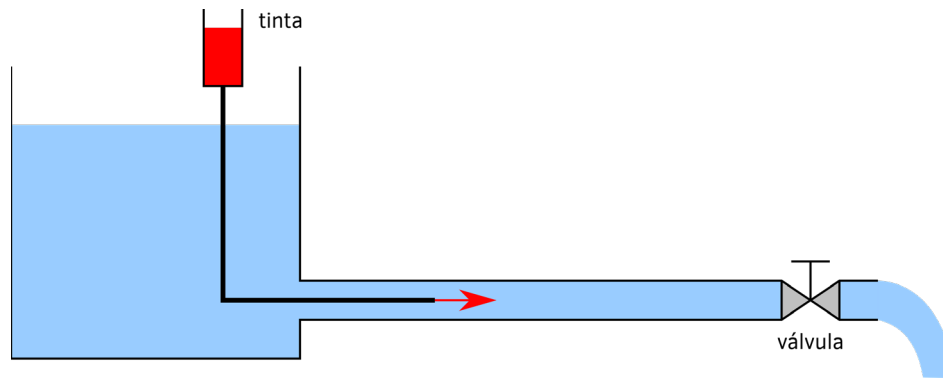


Figura 1.4 Experimento de Reynolds.

Reynolds descubrió que cuando el agua se movía a muy baja velocidad, la tinta era acarreada por el agua formando una línea recta continua. Reynolds llamó a esta condición *flujo laminar*, porque imaginó al agua moviéndose en capas delgadas (láminas) que no se mezclaban entre sí. Al aumentar la velocidad, la línea de tinta oscilaba, pero no se rompía, condición que se conoce como *flujo de transición*. Y si aumentaba lo suficiente la velocidad, la tinta se mezclaba por completo en el agua, condición a la que llamó *flujo turbulento* (Figura 1.5).

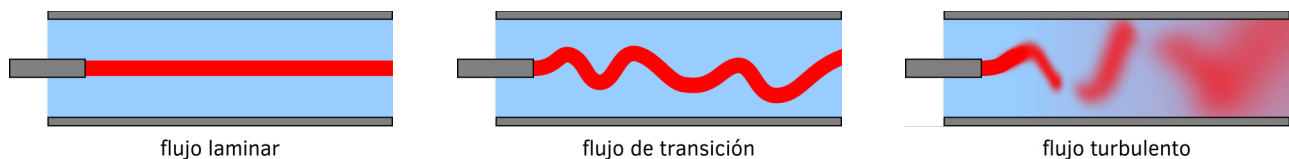


Figura 1.5 Regímenes de flujo en el experimento de Reynolds.

El flujo turbulento es muy importante en ingeniería química, ya que la mayoría de los flujos a escala industrial son turbulentos. Sin embargo, el análisis matemático del flujo turbulento es mucho más complejo que el de flujo laminar.

## 1.2 Temperatura y calor

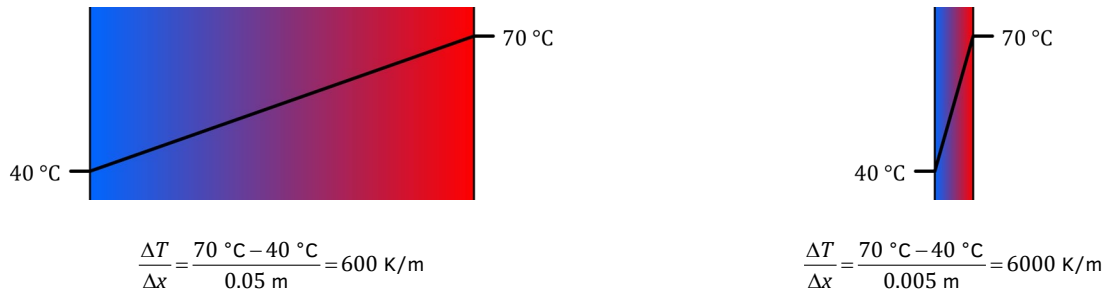
La **termodinámica** es la ciencia que se ocupa de la energía y sus transformaciones. Para hablar de transferencia de calor, es importante definir correctamente los siguientes conceptos.

- ★ **Trabajo:** Es el efecto de una fuerza que se desplaza una cierta distancia a lo largo de su línea de acción.
- ★ **Energía:** Es todo aquello capaz de producir un trabajo. Hay sólo dos tipos de energía:
  - *Energía potencial:* depende de la posición.
  - *Energía cinética:* depende de la velocidad.
- ★ **Temperatura:** Es una medida de la energía cinética de las moléculas.

- ★ **Calor:** Es la energía que pasa de un lugar a otro debido a una diferencia de temperatura. La segunda ley de la termodinámica garantiza que el calor siempre se transfiere de forma espontánea de una región de mayor temperatura a una región de menor temperatura\*.
- ★ **Energía interna:** Es la suma de las energías cinética y potencial de las moléculas.

El uso cotidiano ha llevado a hablar (incorrectamente) de la *cantidad de calor* que tiene un cuerpo. Los cuerpos tienen *energía interna*, sólo se le llama calor cuando esa energía está pasando de un lugar a otro debido a que tienen diferente temperatura.

Al analizar la transferencia de calor, no sólo es importante la *diferencia* de temperatura, sino la *distancia* a lo largo de la cual se presenta dicha diferencia. El concepto que toma en cuenta ambos factores se denomina **gradiente de temperatura**, y se puede definir en su forma más elemental como la diferencia de temperatura dividida entre la distancia,  $\Delta T / \Delta x$ . La Figura 1.8 muestra el efecto de la distancia en el gradiente de temperatura.



**Figura 1.6** Efecto de la distancia en el gradiente de temperatura.

Como se puede observar en este ejemplo, la diferencia de temperatura es la misma, 30 °C, pero el gradiente de temperatura es diez veces mayor en el caso de la derecha. Se como ejercicio demostrar que las unidades °C/m y K/m son equivalentes.

Ya que la temperatura es una función continua de la posición, el gradiente de temperatura se define normalmente en términos de diferencias infinitesimales. Tomando el límite cuando  $\Delta x$  es muy pequeño, se obtiene la derivada de la temperatura con respecto a  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

donde se ha empleado derivadas parciales debido a que la temperatura puede variar respecto a cualquiera de las tres direcciones,  $x$ ,  $y$  o  $z$ . Por lo tanto, el gradiente de temperatura tiene tres componentes, por lo que se considera un vector, que en coordenadas rectangulares se define como:

$$\nabla T \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial T}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (1.2)$$

\* Una transferencia en la dirección opuesta (de menor temperatura a mayor temperatura) no ocurre de forma espontánea, pero puede ser realizada mediante la aplicación de un trabajo. Éste es el principio de funcionamiento de los refrigeradores.

## 1.3 Composición química

La **composición** química de una mezcla puede ser definida como la distribución de las diversas sustancias que constituyen dicha mezcla. Para identificar la composición química, puede emplearse *concentraciones* o *fracciones*.

### 1.3.1 Concentraciones

El término **concentración** se emplea para caracterizar la composición de una mezcla con respecto a su *volumen*. Las dos medidas de concentración más frecuentes son:

- ★ **Concentración másica ( $\rho_i$ ):** Es la masa del componente  $i$  dividida entre el volumen total de la mezcla. Su unidad en el Sistema Internacional es  $\text{kg}/\text{m}^3$ , aunque también se emplea frecuentemente  $\text{g}/\text{L}$ .

$$\rho_i = \frac{m_i}{V} \quad (1.3)$$

- ★ **Concentración molar ( $C_i$ ):** Es la cantidad (en moles) del componente  $i$ , dividida entre el volumen total de la mezcla\*. Su unidad en el SI es  $\text{mol}/\text{m}^3$ , aunque también se emplea frecuentemente  $\text{mol}/\text{L}$ .

$$C_i = \frac{n_i}{V} \quad (1.4)$$

La Figura 1.6 ilustra la diferencia entre los dos tipos de concentración, para dos sustancias de diferente peso molecular. Cuando ambas sustancias tienen la misma concentración molar, hay el mismo número de moléculas de cada una. Por otro lado, cuando tienen la misma concentración másica, hay más moléculas de la sustancia de menor peso molecular.

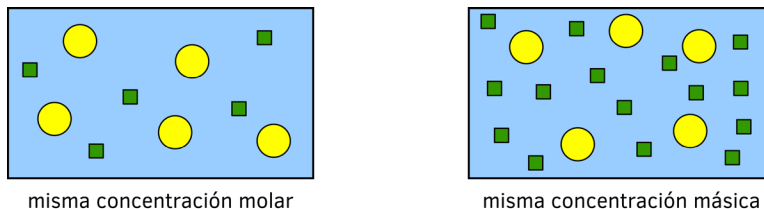


Figura 1.7 Comparación entre concentraciones molar y másica.

Aunque las dos definiciones anteriores se refieren a la concentración de un componente en particular dentro de la mezcla, es conveniente definir también las siguientes concentraciones *totales*, sumando las concentraciones de los  $N$  componentes de la mezcla:

- ★ **Concentración másica total ( $\rho$ ):**

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad (1.5)$$

\* Frecuentemente se emplea el término "molaridad" (abreviado M) para referirse a la concentración molar expresada en  $\text{mol}/\text{L}$ . También es común la notación  $[i]$  para referirse a la concentración molar del componente  $i$ .

★ **Concentración molar total ( $C$ ):**

$$C = \sum_{i=1}^N C_i \quad (1.6)$$

Obsérvese que la concentración másica total se refiere a la masa *de todos los componentes* presente en una unidad de volumen, por lo que resulta claro que corresponde al concepto tradicional de **densidad** ( $\rho = m/V$ ). Ésta es la razón por la que se suele emplear el símbolo  $\rho_i$  para la concentración másica de un componente.

### 1.3.2 Fracciones

La composición de una mezcla puede estar determinada también por la *fracción* de cada uno de sus componentes, referida al total de la mezcla. Las tres fracciones usadas con mayor frecuencia son:

★ **Fracción masa ( $w_i$ ):** Es la masa del componente  $i$  dividida entre la masa total de la mezcla.

$$w_i = \frac{m_i}{m_{\text{total}}} \quad (1.7)$$

★ **Fracción mol ( $x_i$ ):** Es el número de moles del componente  $i$  dividido entre el número de moles totales de la mezcla. En sistemas que involucran una fase líquida y una fase gaseosa, se acostumbra utilizar  $x_i$  para la fase líquida y  $y_i$  para la fase gaseosa.

$$x_i = \frac{n_i}{n_{\text{total}}} \quad (1.8)$$

★ **Fracción volumen ( $\phi_i$ ):** Es el volumen del componente  $i$  dividido entre el volumen total de la mezcla. Debido a que los volúmenes no son aditivos (excepto en soluciones ideales), el uso de la fracción volumen puede dar origen a algunas confusiones.

$$\phi_i = \frac{V_i}{V_{\text{total}}} \quad (1.9)$$

Es importante señalar que, en el caso de mezclas de gases ideales, la fracción mol  $y_i$  y la fracción volumen  $\phi_i$  tienen el mismo valor (una consecuencia de la ley de gas ideal).

En cualquier mezcla, la suma de las fracciones (masa, mol o volumen) de todos los componentes debe ser igual a uno:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad \sum_{i=1}^N \phi_i = 1 \quad (1.10)$$

Cualquiera de estas fracciones puede ser expresada como porcentaje, al multiplicarla por 100%. Así, una fracción mol de 0.21 equivale a un porcentaje mol de 21%. Consecuentemente, la suma de los porcentajes de todos los componentes de la mezcla debe ser 100%.

Estas fracciones (masa, mol o volumen) se expresan habitualmente sin unidades, ya que las unidades del numerador y denominador se cancelan en la división. Sin embargo, se pueden indicar explícitamente dichas unidades para mayor claridad. Por ejemplo, la fracción mol de oxígeno en el aire puede expresarse como 0.21 (sin unidades) o como 0.21 mol de  $O_2$ /mol de aire.

Es relevante mencionar también el concepto de presión parcial, que es una medida de composición que se utiliza *exclusivamente para gases*:

- ★ **Presión parcial** (de un componente): Es la presión que tendría si fuera el único componente presente, ocupando el mismo volumen y a la misma temperatura que la mezcla original. En una mezcla de gases ideales, la presión parcial de un componente es el producto de su fracción mol por la presión total:

$$P_i = y_i P \quad (1.11)$$

Por ejemplo, para el aire, la fracción mol de oxígeno es  $y_{O_2} = 0.21$ . Si la presión total del aire es  $P = 1$  atm, entonces la presión parcial del oxígeno será  $P_{O_2} = 0.21$  atm. Esto significa que, si se tiene un recipiente con aire a 1 atm, y se pudiera remover todos los otros gases excepto el oxígeno, manteniendo la misma temperatura y volumen, la presión en el recipiente descendería a 0.21 atm (Figura 1.7).

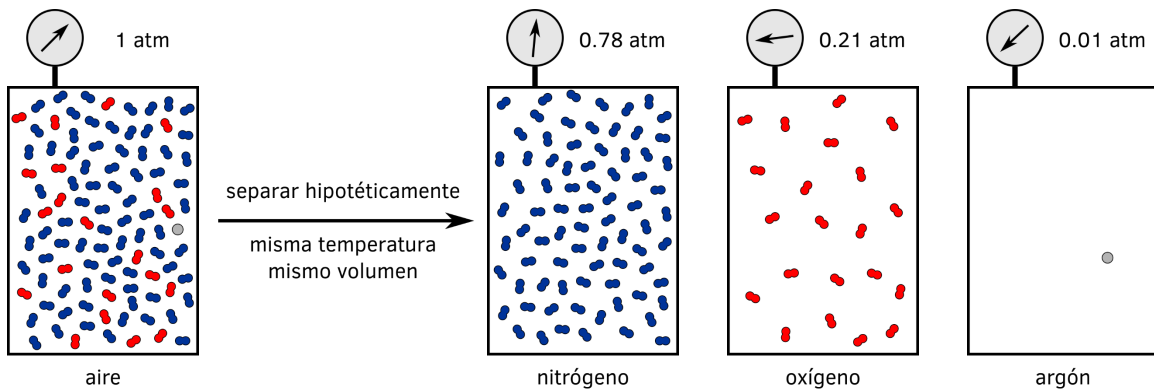


Figura 1.8 Ejemplo del concepto de presión parcial.

### 1.3.3 Densidad de flujo

Considérese una mezcla de  $N$  especies químicas (componentes) en la que exista transferencia de masa. En la mezcla existe cierto número de moléculas de cada componente, moviéndose en diferentes direcciones. Para un componente determinado, digamos  $i$ , se define vectorialmente la velocidad del componente  $\mathbf{v}_i$  como la velocidad promedio de sus moléculas.

Si esta velocidad  $\mathbf{v}_i$  es cero, esto indica que esa especie química no se mueve de forma global, aunque sus moléculas individuales sí lo hagan: en cualquier instante hay el mismo número de moléculas moviéndose en una dirección y en la dirección opuesta, por lo que el movimiento global de dicha sustancia es nulo.

Por otro lado, si hay un mayor número de moléculas moviéndose en una dirección determinada, la velocidad promedio  $\mathbf{v}_i$  de esa sustancia ya no será cero, y por lo tanto dicha sustancia se está *transfiriendo* de un lugar a otro.

Ahora bien, es conveniente definir la **densidad de flujo molar**  $\mathbf{n}_i$  como el producto de la concentración molar del componente  $i$  por su velocidad:

$$\mathbf{n}_i = C_i \mathbf{v}_i \quad (1.12)$$

En el Sistema Internacional, la concentración molar está dada en  $\text{mol}/\text{m}^3$  y la velocidad en  $\text{m}/\text{s}$ , por lo que la densidad de flujo molar estará dada en  $\text{mol}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ .

Igualmente, puede definirse una **densidad de flujo másico**  $\mathbf{n}_i^{(m)}$ , en  $\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ , como el producto de la densidad másica del componente  $i$  por su velocidad:

$$\mathbf{n}_i^{(m)} = \rho_i \mathbf{v}_i \quad (1.13)$$

Estas dos densidades de flujo<sup>\*</sup> son, respectivamente, el número de moles o la masa del componente  $i$  que cruzan una unidad de área en una unidad de tiempo.

### 1.3.4 Velocidad media de flujo

Dado que cualquier movimiento es relativo, dependiendo del sistema de referencia, en una mezcla química donde exista transferencia de masa es necesario establecer una velocidad de referencia respecto a la cual se identifique la velocidad de las diversas especies químicas presentes.

Si la velocidad (como vector) del componente  $i$  se representa como  $\mathbf{v}_i$  y su fracción masa se representa como  $w_i$ , se define la **velocidad promedio másica**  $\mathbf{v}$  como:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{v}_i \quad (1.14)$$

Es importante señalar que la velocidad promedio másica es la velocidad real del fluido, en el sentido convencional.

Por otro lado, se puede definir también la **velocidad promedio molar**  $\mathbf{v}^*$ , empleando en su cálculo la fracción mol  $x_i$  de cada componente:

$$\mathbf{v}^* = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{v}_i \quad (1.15)$$

A diferencia de  $\mathbf{v}$ , la velocidad promedio molar  $\mathbf{v}^*$  no tiene una interpretación física en particular. Además, nótese que generalmente estas dos velocidades promedio no tendrán el mismo valor numérico, por lo que  $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}^*$ .

En transferencia de masa es de particular importancia la velocidad que tenga cada especie química *relativa a la velocidad promedio* (es decir, su velocidad de difusión). Dado que se han definido dos velocidades promedio diferentes, se tienen las dos velocidades relativas siguientes:

$$\text{relativa a la velocidad promedio másica:} \quad \mathbf{v}_i - \mathbf{v} \quad (1.16)$$

$$\text{relativa a la velocidad promedio molar:} \quad \mathbf{v}_i - \mathbf{v}^* \quad (1.17)$$

## 1.4 Mecanismos de transferencia

Al hablar de transferencia de cualquier propiedad física, ya sea momentum, calor, masa o alguna otra, se puede hablar de varios tipos genéricos de transporte:

- ★ **Transporte molecular:** Es la transferencia de una propiedad física debida al comportamiento de las moléculas en un sistema.

<sup>\*</sup> Es posible definir también la densidad de flujo de momentum, con unidades (kg·m/s)/m<sup>2</sup>·s, y la densidad de flujo de energía, con unidades J/m<sup>2</sup>·s. En términos generales, una densidad de flujo representa la cantidad de una propiedad física que cruza una unidad de área durante una unidad de tiempo. Las densidades de flujo son fundamentales para establecer los balances diferenciales que se estudian en el curso siguiente, "Balances de Momento, Calor y Masa".

- ★ **Transporte advectivo:** Es la transferencia de una propiedad física atribuible únicamente al movimiento global de un fluido, que “acarrea” consigo dicha propiedad. El transporte advectivo es por lo tanto directamente proporcional a la velocidad del fluido.
- ★ **Transporte convectivo:** También requiere un fluido en movimiento, pero además involucra una interfase. En la mayoría de los casos es una combinación del transporte molecular con el transporte advectivo. A diferencia del transporte advectivo, no es directamente proporcional a la velocidad del fluido, excepto en casos especiales.
- ★ **Transporte turbulento:** Es el tipo de transporte advectivo que se debe al movimiento del fluido en remolinos de diversos tamaños, cuando el flujo es turbulento.

Es importante señalar que algunos autores no hacen una distinción clara entre advección y convección, usando en ambos casos el término convección. El transporte advectivo no suele ser analizado como un tipo diferente de transporte, pero es un componente fundamental en el transporte convectivo.

En el caso particular de las tres propiedades físicas de interés en ingeniería química (momentum, calor y masa), los transportes molecular y convectivo reciben nombres específicos, que se muestran en la Tabla 1.2.

**Tabla 1.1** Mecanismos de transferencia.

		MECANISMO		
		transporte molecular	transporte convectivo	
PROPIEDAD	momentum	transporte viscoso	arrastre y sustentación	
	calor	conducción	convección	radiación
	masa	difusión	convección	

#### 1.4.1 Mecanismos de transferencia de momentum

**Transporte viscoso** (viscous transport\*): Se presenta cuando una capa de fluido en movimiento ejerce una fuerza sobre otra capa de fluido que se mueve a diferente velocidad, transfiriéndole parte de su momentum.

- ★ EJEMPLO: Un fluido entre dos placas inicialmente en reposo, se pone en movimiento la placa superior, y eventualmente las capas de fluido que se encuentran más abajo se ponen en movimiento. El momentum que tienen ahora lo recibieron de las capas de más arriba, que a su vez lo recibieron de la placa en movimiento.

**Arrastre** (drag): Es cuando parte del momentum de un fluido se transfiere por convección a un objeto, convirtiéndose en una fuerza que actúa sobre el objeto en la misma dirección del movimiento del fluido.

- ★ EJEMPLO: El viento ejerce una fuerza sobre una persona, que la empuja en la dirección en la que sopla.

\* Entre paréntesis se da el nombre en inglés.

**Sustentación (lift):** Como en el caso del arrastre, el momentum del fluido se transfiere a un objeto, pero ejerce una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento del fluido.

- ★ EJEMPLO: La fuerza ejercida por el aire sobre las alas de un avión, para mantenerlo suspendido en el aire. El movimiento relativo del avión y el aire es horizontal, pero la fuerza es vertical.

### 1.4.2 Mecanismos de transferencia de calor

**Conducción (conduction):** Es la transferencia de calor por interacción directa entre las moléculas. En una región de mayor temperatura, las moléculas vibran o se mueven con una mayor velocidad. Al chocar o interactuar con las moléculas vecinas de menor temperatura, les transfieren parte de su energía. Se le asocia generalmente con sólidos, aunque también se presenta en líquidos y gases (sólo que, en estos últimos, generalmente predomina la convección).

- ★ EJEMPLO: Una barra metálica introducida en brasas. Las moléculas del extremo caliente vibran más rápido, interactúan con las moléculas vecinas y les transfieren parte de su energía cinética. Eventualmente, la barra se va calentando a lo largo de su longitud.

**Convección (convection):** Es la transferencia de calor en la que un fluido en movimiento recibe o cede energía a una interfase. Se presenta cuando una superficie a cierta temperatura está en contacto con un fluido en movimiento a temperatura diferente. Es el resultado combinado de la conducción y la advección. Se divide en convección libre (también llamada natural, en la que el movimiento del fluido se debe a la propia diferencia de temperatura) y en convección forzada (en la que el movimiento del fluido se debe a algún agente externo). Generalmente el calor se transfiere más rápidamente cuando hay convección forzada que cuando es convección libre.

- ★ EJEMPLO: Enfriamiento de una taza de café. Es convección libre si no hay corrientes de viento, el aire alrededor y encima de la taza se calienta, disminuye su densidad y tiende a subir (convección libre), llevándose consigo el calor que recibió de la taza. Una vez que el café está a la misma temperatura que la habitación, deja de haber diferencia de densidades y el aire deja de moverse. Por otro lado, si se le sopla a la taza, o se coloca un ventilador, el aire se mueve debido a ese agente externo (convección forzada). Incluso si el café está frío, se le puede seguir soplando o el ventilador puede seguir funcionando.

**Radiación (radiation):** Es la transferencia de calor que se realiza a través de ondas electromagnéticas. No requiere de un medio material (se puede transmitir a través del vacío), aunque en muchas ocasiones sí exista de por medio. Éste es un mecanismo de transferencia exclusivo del calor\*.

- ★ EJEMPLO: El calor que recibe la Tierra desde el Sol, se transmite por radiación a través del espacio vacío. También, el calor que se siente al estar frente a una fogata es por radiación, lo que se puede demostrar fácilmente colocando un vidrio entre la fogata y la persona.

### 1.4.3 Mecanismos de transferencia de masa

**Difusión (diffusion):** El movimiento aleatorio de las moléculas hace que cambien de lugar constantemente. Esto hace que las moléculas de una sustancia tiendan a pasar de una región de mayor concentración a una de menor concentración.

---

\* El momentum también se puede transferir por radiación, pero este fenómeno normalmente no es de importancia en ingeniería química.

- ★ EJEMPLO: Una gota de tinta en agua, al paso del tiempo se ve más extendida porque se ha difundido.

**Convección** (convection): Es la transferencia de masa en una interfase que involucra un fluido en movimiento y es el resultado combinado de la difusión y la advección. En ocasiones se le denomina “convección de masa” para distinguirla de la transferencia de calor por convección.

- ★ EJEMPLO: La ropa se seca más rápido cuando sopla viento, porque el movimiento del aire se lleva el vapor de agua.

## II. ANÁLISIS DIMENSIONAL

<b>COMPETENCIAS ESPECÍFICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Determina grupos adimensionales y/o correlaciones utilizando métodos de análisis dimensional.</li> <li>▪ Interpreta los grupos adimensionales involucrados en un sistema con base en las fuerzas impulsoras que intervienen.</li> <li>▪ Aplica condiciones de similitud para el escalamiento de fenómenos físicos.</li> </ul>		
<b>COMPETENCIAS GENÉRICAS</b>	INSTRUMENTALES	INTERPERSONALES	SISTÉMICAS
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.</li> <li>▪ Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación.</li> <li>▪ Capacidad para tomar decisiones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Capacidad de trabajo en equipo.</li> <li>▪ Capacidad crítica y autocrítica.</li> <li>▪ Compromiso ético.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Habilidad para trabajar en forma autónoma.</li> <li>▪ Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.</li> <li>▪ Capacidad para actuar en nuevas situaciones.</li> <li>▪ Capacidad de aplicar los conocimientos en la práctica.</li> <li>▪ Compromiso con la calidad.</li> <li>▪ Capacidad creativa.</li> </ul>

Una cantidad es **dimensional** cuando su valor numérico depende del sistema de unidades empleado. Por ejemplo, la estatura de una persona puede expresarse como 1.74 metros o como 68.5 pulgadas, siendo el valor muy diferente dependiendo de cuál unidad se use.

Es muy importante distinguir adecuadamente entre una magnitud física y su dimensión. Por ejemplo, el diámetro  $D$  de una tubería, la longitud  $L$  de la misma, y la rugosidad\*  $\epsilon$  de su superficie interna son longitudes. Aunque se representen con diferentes símbolos en las ecuaciones o se expresen en diferentes unidades, todas tienen la misma dimensión, en este caso la dimensión es longitud.

Dos cantidades son **conmensurables** si tienen las mismas dimensiones, por lo que se pueden comparar, convertir, sumar y restar. Por ejemplo, la altura de un edificio en metros y el diámetro de una tubería en pulgadas son conmensurables: ambas son medidas de longitud. Por otro lado, dos cantidades son **inconmensurables** si tienen diferentes dimensiones, por lo que únicamente se pueden multiplicar o dividir. No se puede convertir una cantidad de metros a segundos, pero sí se puede dividir una distancia en metros entre un tiempo en segundos, para obtener una velocidad en metros por segundo.

El siguiente principio es el pilar fundamental del análisis dimensional:

- ★ **Principio de homogeneidad dimensional:** En una igualdad, ambos miembros deben ser conmensurables; y en cada miembro sólo se puede sumar o restar cantidades conmensurables. Además, todos los exponentes y argumentos de funciones trascendentales deben ser adimensionales.

En la aplicación práctica del principio de homogeneidad dimensional, no sólo se requiere que las cantidades sumadas y restadas sean conmensurables, sino que también tengan las mismas unidades.

### 2.1 El Sistema Internacional de Unidades

Históricamente, científicos e ingenieros han empleado diversos sistemas de unidades. El sistema métrico fue concebido a finales del siglo XVII con base en las recomendaciones de un grupo de científicos por la Academia de Ciencias de Francia. Los avances internacionales en metrología llevaron eventualmente a la firma del Tratado de la Convención del Metro en 1875, estableciendo tres organizaciones internacionales para normar los estándares métricos, incluyendo la Oficina Internacional de Pesos y Medidas. En 1960, la décimoprimer Conferencia General de Pesos y Medidas creó la denominación **Sistema Internacional de Unidades**<sup>†</sup>.

\* Las tuberías de uso industrial no son perfectamente lisas. La rugosidad es el tamaño promedio de las irregularidades en su interior, y es un factor muy importante en transporte de fluidos.

† De hecho, la abreviatura SI viene del nombre en francés, "Système International d'Unités".

La definición de las unidades fundamentales del SI ha pasado por diversas revisiones. En la revisión que entró en vigor en 2019, se fija el valor numérico exacto de siete constantes físicas (Tabla 2.1), como base para definir la unidad de cada una de siete dimensiones fundamentales (Tabla 2.2) que son la base para definir las demás las cantidades físicas.

**Tabla 2.1** Constantes físicas base para definir el Sistema Internacional.

CONSTANTE	VALOR
frecuencia de transición del cesio	$\Delta\nu_{Cs} \equiv 9\,192\,631\,770\text{ s}^{-1}$
velocidad de la luz	$c \equiv 299\,792\,458\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
constante de Planck	$h \equiv 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
carga elemental	$e \equiv 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\text{ A}\cdot\text{s}$
constante de Boltzmann	$k \equiv 1.380\,649 \times 10^{-23}\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
constante de Avogadro	$N_A \equiv 6.022\,140\,76 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
eficacia luminosa	$K_{cd} \equiv 683\text{ cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{s}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$

**Tabla 2.2** Dimensiones fundamentales del Sistema Internacional.

DIMENSIÓN	SÍMBOLO DIMENSIONAL	UNIDAD EN EL SISTEMA INTERNACIONAL		
		NOMBRE	SÍMBOLO	CON BASE EN LAS CONSTANTES FUNDAMENTALES
masa	<b>M</b>	kilogramo	kg	$1\text{ kg} = \frac{(299792458)^2}{(6.62607015 \times 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2}$
longitud	<b>L</b>	metro	m	$1\text{ m} = \frac{9192631770}{299792458} \frac{c}{\Delta\nu_{Cs}}$
tiempo	<b>T</b>	segundo	s	$1\text{ s} = \frac{9192631770}{\Delta\nu_{Cs}}$
temperatura termodinámica	<b>Θ</b>	kelvin	K	$1\text{ K} = \frac{1.380649 \times 10^{-23}}{(6.62607015 \times 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{k}$
cantidad de sustancia	<b>N</b>	mol	mol	$1\text{ mol} = \frac{6.02214076 \times 10^{23}}{N_A}$
corriente eléctrica	<b>I</b>	ampere	A	$1\text{ A} = \frac{e\Delta\nu_{Cs}}{(1.602176634 \times 10^{-19})(9192631770)}$
intensidad luminosa	<b>J</b>	candela	cd	$1\text{ cd} = \frac{K_{cd}h(\Delta\nu_{Cs})^2}{(683)(6.62607015 \times 10^{-34})(9192631770)^2}$

Las dimensiones de las cantidades físicas pueden ser deducidas de su definición. Por ejemplo, de la definición de velocidad  $v = d/t$ , donde la distancia  $d$  tiene dimensiones de longitud L, y el tiempo  $t$  tiene dimensiones de tiempo T, se tiene que  $v$  tiene dimensiones  $LT^{-1}$ .

Alternativamente, las dimensiones pueden deducirse de las unidades. Por ejemplo, la unidad SI de fuerza es el newton, N, que equivale a  $\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$ , por lo que las dimensiones de la fuerza son  $MLT^{-2}$ . La Tabla 2.3 lista las dimensiones de algunas cantidades físicas empleadas en ingeniería química.

**Tabla 2.3** Dimensiones de algunas cantidades físicas.  
(en negritas se destacan las dimensiones fundamentales del SI)

<b>CANTIDAD</b>	<b>UNIDAD SI</b>	<b>DIMENSIONES</b>
Aceleración	m/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>
Aceleración angular	rad/s <sup>2</sup>	T <sup>-2</sup>
Ángulo	rad	[-]
Ángulo sólido	sr	[-]
Área	m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>
<b>Cantidad de sustancia</b>	<b>mol</b>	<b>N</b>
Capacidad calorífica	J/kg·K	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>
Capacidad calorífica molar	J/mol·K	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup> N <sup>-1</sup>
Coefficiente de temperatura	K <sup>-1</sup>	Θ <sup>-1</sup>
Coefficiente de transferencia de calor	W/m <sup>2</sup> ·K	MT <sup>-3</sup> Θ <sup>-1</sup>
Concentración molar	mol/kg	M <sup>-1</sup> N
Concentración molar	mol/m <sup>3</sup>	L <sup>-3</sup> N
Conductividad térmica	W/m·K	MLT <sup>-3</sup> Θ <sup>-1</sup>
<b>Corriente eléctrica</b>	<b>A</b>	<b>I</b>
Densidad	kg/m <sup>3</sup>	ML <sup>-3</sup>
Densidad de flujo de calor	W/m <sup>2</sup>	MT <sup>-3</sup>
Densidad de flujo de masa	kg/m <sup>2</sup> ·s	ML <sup>-2</sup> T <sup>-1</sup>
Densidad de flujo molar	mol/m <sup>2</sup> ·s	L <sup>-2</sup> T <sup>-1</sup> N
Densidad molar (concentración)	mol/m <sup>3</sup>	L <sup>-3</sup> N
Energía, trabajo, calor	J	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
Entropía	J/K	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>
Flujo másico	kg/s	MT <sup>-1</sup>
Flujo molar	mol/s	T <sup>-1</sup> N
Flujo volumétrico, caudal	m <sup>3</sup> /s	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>
Frecuencia	Hz	T <sup>-1</sup>
Frecuencia angular	rad/s	T <sup>-1</sup>
Fuerza	N	MLT <sup>-2</sup>
Gradiente de concentración (base masa)	kg/m <sup>4</sup>	ML <sup>-4</sup>
Gradiente de concentración (base molar)	mol/m <sup>4</sup>	L <sup>-4</sup> N
Gradiente de temperatura	K/m	L <sup>-1</sup> Θ
Gradiente de velocidad, rapidez de deformación	s <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>
<b>Intensidad luminosa</b>	<b>cd</b>	<b>J</b>
<b>Longitud</b>	<b>m</b>	<b>L</b>
<b>Masa</b>	<b>kg</b>	<b>M</b>
Momento de torsión, torque	N·m	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
Momentum	kg·m/s	MLT <sup>-1</sup>
Peso molecular	kg/mol	MN <sup>-1</sup>
Potencia	W	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>
Presión, esfuerzo	Pa	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
<b>Temperatura</b>	<b>K</b>	<b>Θ</b>

CANTIDAD	UNIDAD SI	DIMENSIONES
Tensión superficial	N/m	$MT^{-2}$
<b>Tiempo</b>	<b>s</b>	<b>T</b>
Velocidad	m/s	$LT^{-1}$
Velocidad angular	rad/s	$T^{-1}$
Viscosidad	Pa·s	$ML^{-1}T^{-1}$
Viscosidad cinemática, difusividad	$m^2/s$	$L^2T^{-1}$
Volumen	$m^3$	$L^3$
Volumen específico	$m^3/kg$	$M^{-1}L^3$
Volumen específico molar	$m^3/mol$	$L^3N^{-1}$

## 2.2 Técnicas de análisis dimensional

Aunque, como se mencionó previamente, la manera más simple de obtener un número adimensional es dividiendo dos cantidades que tengan las mismas dimensiones, lo más común en problemas de ingeniería es tener varios parámetros físicos que tengan dimensiones diferentes. En este caso, el número adimensional estará formado por varios parámetros multiplicando o dividiendo, de tal forma que se cancelen todas las unidades, por lo que puede no ser inmediatamente obvio cómo se deben combinar dichos parámetros.

Las principales técnicas de análisis dimensional involucran la aplicación del principio de homogeneidad dimensional para generar los grupos adimensionales en los que aparezcan los parámetros dimensionales de interés. Dentro de esta categoría están el método de Rayleigh y el método pi de Buckingham. Se mostrará también la técnica para reducir una ecuación a su forma adimensional, lo que permite identificar directamente los grupos relevantes.

### 2.2.1 Método de Rayleigh

Este método permite obtener una relación funcional entre algunas variables agrupadas como producto de grupos adimensionales (posiblemente elevados a exponentes desconocidos). Los pasos para aplicar el método son:

1. Hacer una lista de todas las variables que puedan influir en la variable dependiente.
2. Expresar la variable dependiente como el producto de una constante adimensional desconocida ( $C$ ) y cada una de las variables independientes elevadas a exponentes desconocidos ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etcétera).
3. Sustituir cada una de las variables por su equivalente dimensional.
4. De acuerdo al principio de homogeneidad dimensional, el exponente de cada dimensión debe ser el mismo para ambos miembros de la igualdad. Esto permite obtener un sistema de ecuaciones lineales a partir de los exponentes de cada dimensión.
5. Resolver el sistema de ecuaciones para determinar los exponentes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etcétera. Si el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, la solución no es única, por lo que será necesario expresarlos en función de algunos de ellos.
6. Sustituir los exponentes en la ecuación original. Con manipulación algebraica, es posible formar grupos adimensionales agrupando los parámetros que tengan exponentes desconocidos comunes.

El método de Rayleigh tiene dos desventajas:

- ★ No proporciona a priori ninguna información acerca de cuántos grupos adimensionales se obtendrán.
- ★ La relación multiplicativa asumida para las variables puede no ser la más adecuada para describir el fenómeno estudiado.

### EJEMPLO 2.1

Cuando un líquido se bombea a través de una tubería, experimenta una pérdida de energía que se manifiesta como una disminución de su presión. Asumir que la caída de presión por unidad de longitud ( $\Delta P / L$ , en Pa/m) depende del flujo volumétrico ( $\dot{V}$ , en m<sup>3</sup>/s), la densidad del líquido ( $\rho$ , en kg/m<sup>3</sup>), la viscosidad del líquido ( $\mu$ , en kg/m·s) y el diámetro de la tubería ( $D$ , en m) y encontrar una relación adimensional para estas variables empleando el método de Rayleigh.

### SOLUCIÓN

Primero es necesario expresar la variable dependiente  $\Delta P / L$  como el producto de una constante adimensional desconocida  $C$  y cada una de las variables independientes elevadas a exponentes desconocidos:

$$\frac{\Delta P}{L} = C \dot{V}^a \rho^b \mu^c D^d$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son los exponentes buscados. A continuación, se sustituye cada variable por su equivalente dimensional (Tabla 2.2).

$$ML^{-2}T^{-2} = (L^3T^{-1})^a (ML^{-3})^b (ML^{-1}T^{-1})^c (L)^d$$

Nótese que la tabla indica que las dimensiones de presión son  $ML^{-1}T^{-2}$ , pero como  $\Delta P / L$  está dividido entre una longitud, sus dimensiones son  $ML^{-2}T^{-2}$ . Nótese también que las dimensiones de  $C$  se omiten en el análisis, por ser una constante adimensional.

Aplicando las leyes de los exponentes para reacomodar:

$$ML^{-2}T^{-2} = (L^{3a}T^{-a})(M^bL^{-3b})(M^cL^{-c}T^{-c})(L^d)$$

$$ML^{-2}T^{-2} = M^{b+c}L^{3a-3b-c+d}T^{-a-c}$$

Igualando los exponentes correspondientes de cada dimensión (de acuerdo al principio de homogeneidad dimensional) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b + c &= 1 \\ 3a - 3b - c + d &= -2 \\ -a - c &= -2 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, se tiene un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, por lo que existe un número infinito de soluciones, en las que tres de las incógnitas dependerán de la cuarta. Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = -d - 3$$

$$b = -d - 4$$

$$c = d + 5$$

Sustituyendo estos exponentes en la relación funcional establecida al inicio se tiene:

$$\frac{\Delta P}{L} = C \dot{V}^{-d-3} \rho^{-d-4} \mu^{d+5} D^d$$

Se aplica de nuevo las propiedades de los exponentes para reordenar esta ecuación:

$$\frac{\Delta P}{L} = C \dot{V}^{-d} \dot{V}^{-3} \rho^{-d} \rho^{-4} \mu^d \mu^5 D^d$$

Ahora se agrupan todas las cantidades con exponente numérico y todas las cantidades con exponente  $d$ :

$$\frac{\Delta P}{L} = C (\dot{V}^{-3} \rho^{-4} \mu^5) (\dot{V}^{-d} \rho^{-d} \mu^d D^d)$$

Finalmente, reacomodando:

$$\frac{\Delta P}{L} = C \left( \frac{\mu^5}{\dot{V}^3 \rho^4} \right) \left( \frac{\mu \dot{V}}{\rho} \right)^d$$

Mediante este análisis, se ha encontrado el grupo adimensional  $\mu D / \dot{V} \rho$ , y se ha agrupado toda la dimensionalidad de la ecuación en el grupo  $\mu^5 / \dot{V}^3 \rho^4$  (se deja como ejercicio para el estudiante demostrar que este grupo tiene las mismas dimensiones que  $\Delta P / L$ ). Los parámetros desconocidos  $C$  y  $d$  deberán obtenerse experimentalmente.

Se puede expresar esta última ecuación en forma completamente adimensional, al pasar el grupo  $\mu^5 / \dot{V}^3 \rho^4$  al lado izquierdo:

$$\frac{\dot{V}^3 \rho^4 \Delta P}{\mu^5 L} = C \left( \frac{\mu D}{\dot{V} \rho} \right)^d$$

## 2.2.2 Método pi de Buckingham

Este método permite obtener un conjunto de grupos adimensionales independientes a partir de un conjunto dado de parámetros. Tiene como base el siguiente teorema:

- ★ **Teorema pi de Buckingham:** Para un conjunto de  $N_p$  parámetros que involucran  $N_D$  dimensiones fundamentales (masa, longitud, tiempo, etcétera), el número de grupos adimensionales independientes que se puede formar es simplemente la diferencia  $N_G = N_p - N_D$ .

Los pasos para aplicar el método pi de Buckingham se enumeran a continuación:

1. Hacer una lista de los parámetros relevantes, incluyendo el parámetro dependiente de interés. El número total de parámetros es  $N_p$ .
2. Anotar las dimensiones fundamentales de cada parámetro.
3. Identificar el número de dimensiones fundamentales presentes, que será  $N_D$ .
4. Determinar el número de grupos adimensionales de acuerdo al teorema pi de Buckingham,  $N_G = N_p - N_D$ .
5. De los parámetros independientes, seleccionar un número igual a  $N_D$  para usarse como parámetros comunes (parámetros base) en todos los grupos adimensionales. Este conjunto debe incluir todas las dimensiones del problema. Frecuentemente se incluye en estos parámetros una longitud, una densidad y una velocidad.
6. Verificar que las dimensiones de los parámetros seleccionados sean linealmente independientes, al comprobar que el determinante de la matriz de sus dimensiones sea diferente de cero.
7. Formar cada uno de los grupos pi como el producto los parámetros comunes elevados a exponentes desconocidos ( $a, b, c \dots$ ) y uno de los parámetros no comunes.
8. Sustituir los símbolos dimensionales correspondientes a cada parámetro. Igualar con el producto de todas las dimensiones elevadas a la potencia cero (adimensional).
9. Para cada grupo pi, igualar los exponentes de cada dimensión y resolver el sistema de ecuaciones resultante para encontrar los valores de los exponentes.
10. Sustituir los exponentes en el grupo pi. Los parámetros con exponentes negativos se pasan al denominador con exponente positivo. Si hay exponentes fraccionarios, se puede elevar todo el grupo a la potencia del común denominador para tener sólo exponentes enteros. Es recomendable comprobar que el grupo realmente sea adimensional, sustituyendo las unidades de cada parámetro para verificar que efectivamente se cancelen.
11. El grupo adimensional que contiene el parámetro dependiente se expresa como una función de los otros grupos adimensionales.

Al aplicar una técnica de análisis dimensional como el método pi de Buckingham, se obtienen diferentes conjuntos de grupos adimensionales dependiendo de cuáles parámetros se tomen como base común. Sin embargo, estos conjuntos son *equivalentes e interconvertibles*, pues el número de grupos está establecido por teorema pi. Se puede manipular un conjunto dado de grupos adimensionales para formar otro conjunto equivalente, de acuerdo a las siguientes reglas:

- ★ Puede obtenerse un grupo adimensional diferente elevando cualquier grupo adimensional a un exponente. El grupo adimensional original debe descartarse. En particular, si el exponente es  $-1$ , se obtiene un grupo que es recíproco del original.
- ★ Puede obtenerse un grupo diferente multiplicando o dividiendo dos grupos adimensionales. Uno de los dos grupos empleados debe descartarse, pero no ambos.

- ★ Puede combinarse las dos reglas anteriores empleando varios grupos adimensionales. Por cada nuevo grupo generado debe descartarse uno de los grupos empleados para generarlo.

En cualquier caso, el número de grupos adimensionales en el conjunto debe ser siempre  $N_G = N_p - N_D$ , como lo establece el teorema pi de Buckingham.

**EJEMPLO 2.2**

La presión de salida  $P$  de un ventilador centrífugo puede considerarse que depende del flujo volumétrico  $\dot{V}$ , de la densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  del gas, así como de la velocidad angular  $\omega$  y el diámetro  $d$  del impulsor. Aplicando el método pi de Buckingham, expresar esta relación en forma adimensional.

**SOLUCIÓN**

Se comienza enumerando todos los parámetros involucrados, así como sus dimensiones:

Parámetro	Unidad SI	Dimensiones
$P$	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
$\dot{V}$	$m^3/s$	$L^3T^{-1}$
$\rho$	$kg/m^3$	$ML^{-3}$
$\mu$	$Pa \cdot s$	$ML^{-1}T^{-1}$
$\omega$	$rad/s$	$T^{-1}$
$d$	m	L

El número de parámetros es  $N_p = 6$ . El número de dimensiones fundamentales que aparecen en este conjunto de parámetros es  $N_D = 3$  (masa, longitud y tiempo). Por lo tanto, de acuerdo al teorema pi de Buckingham, es posible formar  $N_G = N_p - N_D = 6 - 3 = 3$  grupos adimensionales independientes.

A continuación, se selecciona un número de parámetros independientes igual al número de dimensiones  $N_D$ , para emplearse como base para los grupos adimensionales. El primer requisito es que estos parámetros base abarquen todas las dimensiones del problema (por ejemplo, si se usara  $\dot{V}$ ,  $\omega$  y  $d$ , en ninguno aparece la masa como dimensión, por lo que se sabe que no son una selección válida). En este caso, se seleccionarán  $\rho$ ,  $\omega$  y  $d$ . Es necesario verificar esta selección, construyendo una matriz con los exponentes de cada dimensión en estos tres parámetros:

$$\begin{matrix} & M & L & T \\ \rho & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \\ \omega & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ d & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Se calcula el determinante de esta matriz. En este ejemplo, lo más fácil es emplear un desarrollo por cofactores, aprovechando los ceros presentes en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)[(0)(0) - (1)(-1)] = 1$$

Ya que el determinante obtenido es *diferente de cero*, los parámetros seleccionados son válidos para el método pi de Buckingham. Se procede ahora a formar los tres grupos pi, empleando estos tres parámetros base y cada uno de los tres parámetros restantes:

$$\pi_1 = \rho^a \omega^b d^c P \quad \pi_2 = \rho^a \omega^b d^c \dot{V} \quad \pi_3 = \rho^a \omega^b d^c \mu$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son exponentes desconocidos, y generalmente diferentes para cada grupo pi.

Primero se procede para el grupo  $\pi_1$  sustituyendo los símbolos dimensionales para cada parámetro:

$$\pi_1 = \rho^a \omega^b d^c P$$

$$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c (ML^{-1}T^{-2})$$

donde se ha igualado al producto  $M^0 L^0 T^0$  porque  $\pi_1$  debe ser adimensional. A continuación, se aplican las leyes de los exponentes para simplificar el lado derecho de la igualdad:

$$M^0 L^0 T^0 = (M^a L^{-3a}) (T^{-b}) (L^c) (ML^{-1}T^{-2})$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{a+1} L^{-3a+c-1} T^{-b-2}$$

A continuación, se forma un sistema de ecuaciones igualando el exponente de cada dimensión en cada miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{matrix} M & \rightarrow & 0 = a + 1 \\ L & \rightarrow & 0 = -3a + c - 1 \\ T & \rightarrow & 0 = -b - 2 \end{matrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{matrix} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -2 \end{matrix}$$

Al sustituir estos exponentes en el grupo  $\pi_1$ :

$$\pi_1 = \rho^{-1} \omega^{-2} d^{-2} P$$

se reacomoda para obtener:

$$\pi_1 = \frac{P}{\rho \omega^2 d^2}$$

Luego, para el grupo  $\pi_2$ :

$$\pi_2 = \rho^a \omega^b d^c \dot{V}$$

$$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c (L^3 T^{-1})$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^a L^{-3a+c+3} T^{-b-1}$$

Se forma el sistema de ecuaciones igualando el exponente de cada dimensión en cada miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow 0 = a \\ L &\rightarrow 0 = -3a + c + 3 \\ T &\rightarrow 0 = -b - 1 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -1 \\ c &= -3 \end{aligned}$$

Al sustituir estos exponentes en el grupo  $\pi_2$ :

$$\pi_2 = \rho^0 \omega^{-1} d^{-3} \dot{V}$$

$$\pi_2 = \frac{\dot{V}}{\omega d^3}$$

Por último, para el grupo  $\pi_3$ :

$$\pi_3 = \rho^a \omega^b d^c \mu$$

$$M^0 L^0 T^0 = (ML^{-3})^a (T^{-1})^b (L)^c (ML^{-1}T^{-1})$$

$$M^0 L^0 T^0 = M^{a+1} L^{-3a+c-1} T^{-b-1}$$

Se forma el sistema de ecuaciones igualando el exponente de cada dimensión en cada miembro de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} M &\rightarrow 0 = a + 1 \\ L &\rightarrow 0 = -3a + c - 1 \\ T &\rightarrow 0 = -b - 1 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= -1 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Al sustituir estos exponentes en el grupo  $\pi_3$ :

$$\pi_3 = \rho^{-1} \omega^{-1} d^{-2} \mu$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho \omega d^2}$$

Finalmente, se puede expresar el grupo adimensional  $\pi_1$ , que contiene la variable dependiente, en función de los otros dos grupos adimensionales que contienen únicamente variables independientes:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

$$\frac{P}{\rho \omega^2 d^2} = f\left(\frac{\dot{V}}{\omega d^3}, \frac{\mu}{\rho \omega d^2}\right)$$

La naturaleza exacta de dicha relación funcional tendría que ser determinada experimentalmente. ■

### 2.2.3 Adimensionalización de una ecuación\*

La ventaja de este método es que genera directamente los grupos adimensionales *relevantes* al fenómeno físico estudiado, puesto que se parte de la ecuación que representa dicho fenómeno.

1. Identificar parámetros macroscópicos de referencia en el sistema de interés (por ejemplo, una longitud característica y una velocidad característica). Cuando las propiedades físicas son constantes, se pueden emplear también como referencia (densidad, viscosidad, etcétera).

\* Esta sección puede omitirse sin afectar el curso. Se ha incluido porque es una técnica importante para el curso siguiente, "Balance de Momento, Calor y Masa".

2. Emplear esos parámetros macroscópicos para definir variables adimensionales para todos los parámetros que aparezcan en la ecuación.
3. Hacer el cambio de variables en la ecuación utilizando las variables adimensionales del paso anterior, de tal forma que todos los términos en la ecuación sean adimensionales.
4. Como resultado del paso anterior, se puede identificar en la ecuación los grupos adimensionales formados con los parámetros de referencia. Ya que estos grupos aparecieron directamente en la ecuación durante el proceso de adimensionalización, son los que directamente influyen en el fenómeno físico descrito por la ecuación inicial.

**EJEMPLO 2.3\***

Una ecuación muy importante en mecánica de fluidos es la ecuación de Navier-Stokes<sup>†</sup>. En coordenadas rectangulares, en la dirección  $x$ , dicha ecuación es:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left[ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

donde  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  son las tres componentes del vector de velocidad del fluido,  $P$  es la presión,  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y viscosidad (constantes) del fluido, respectivamente, y  $g_x$  es la componente de la gravedad en la dirección  $x$ . Se desea adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes para identificar cuáles son los grupos adimensionales que influyen directamente en el comportamiento del fluido descrito por esta ecuación.

**SOLUCIÓN**

Es necesario primero seleccionar parámetros macroscópicos de referencia. Supongamos que el fenómeno físico que se quiere estudiar es el flujo de un líquido dentro de una tubería. Una longitud característica en este caso puede ser el diámetro interno de la tubería,  $D$ , y una velocidad característica puede ser la velocidad media del fluido,  $\bar{v}$ . Aunque el tiempo aparece como variable en la ecuación, no es necesario seleccionar un tiempo característico, porque la cantidad  $D/\bar{v}$  tiene unidades de tiempo. Para adimensionalizar la componente  $x$  de la gravedad, se emplea la magnitud de la misma gravedad, simplemente  $g$ . Se definen entonces las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{D} \quad y^* = \frac{y}{D} \quad z^* = \frac{z}{D} \quad t^* = \frac{t\bar{v}}{D} \quad v_i^* = \frac{v_i}{\bar{v}} \quad P^* = \frac{P}{\rho\bar{v}^2} \quad g_x^* = \frac{g_x}{g}$$

Nótese cómo tampoco fue necesaria una presión de referencia, puesto que la densidad del fluido también puede emplearse para hacer adimensional la presión (se deja como ejercicio demostrar que  $\rho\bar{v}^2$  tiene las mismas dimensiones que  $P$ ). Para simplificar la manipulación algebraica, cada una de las variables originales se puede despejar de su definición, como se muestra a continuación:

$$x = Dx^* \quad y = Dy^* \quad z = Dz^* \quad t = \frac{t^*D}{\bar{v}} \quad v_i = \bar{v}v_i^* \quad P = \rho\bar{v}^2P^* \quad g_x = gg_x^*$$

Estas variables se sustituyen ahora en la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial(\bar{v}v_x^*)}{\partial(t^*D/\bar{v})} + \rho \left[ (\bar{v}v_x^*) \frac{\partial(\bar{v}v_x^*)}{\partial(Dx^*)} + (\bar{v}v_y^*) \frac{\partial(\bar{v}v_x^*)}{\partial(Dy^*)} + (\bar{v}v_z^*) \frac{\partial(\bar{v}v_x^*)}{\partial(Dz^*)} \right] = -\frac{\partial(\rho\bar{v}^2P^*)}{\partial(Dx^*)} + \mu \left[ \frac{\partial^2(\bar{v}v_x^*)}{\partial(Dx^*)^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}v_x^*)}{\partial(Dy^*)^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}v_x^*)}{\partial(Dz^*)^2} \right] + \rho gg_x^*$$

\* Este ejemplo puede omitirse sin afectar el curso. Se ha incluido porque es una técnica importante para el curso siguiente, "Balances de Momento, Calor y Masa".

† Las ecuaciones de Navier-Stokes se obtienen de un análisis diferencial de la transferencia de momentum en flujo laminar de un fluido newtoniano de densidad constante.

Recordando que  $\rho$ ,  $D$  y  $\bar{v}$  son parámetros constantes, se pueden sacar de las derivadas parciales correspondientes:

$$\frac{\rho \bar{v}^2}{D} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \frac{\rho \bar{v}^2}{D} \left[ v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + v_z^* \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} \right] = -\frac{\rho \bar{v}^2}{D} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\mu \bar{v}}{D} \left[ \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} \right] + \rho g g_x^*$$

Examinando el primer término de esta ecuación, se ve que todas las dimensiones quedaron agrupadas en el factor  $\rho \bar{v}^2 / D$ , ya que  $\partial v_x^* / \partial t^*$  no tiene unidades. De acuerdo al principio de homogeneidad dimensional, todos los términos de la ecuación tendrían las mismas unidades. Entonces, para que la ecuación sea adimensional, hay que multiplicar todos los términos por  $D / \rho \bar{v}^2$ . Después de simplificar, queda:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + \left[ v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} + v_z^* \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} \right] = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \left( \frac{\mu}{\rho \bar{v} D} \right) \left[ \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z^{*2}} \right] + \left( \frac{g D}{\bar{v}^2} \right) g_x^*$$

En esta última ecuación, las dos cantidades encerradas entre paréntesis agrupan las únicas cantidades dimensionales de la ecuación, formando a su vez los dos grupos adimensionales\* que influyen en el fenómeno físico analizado:

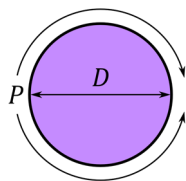
$$\frac{\mu}{\rho \bar{v} D} \quad \frac{g D}{\bar{v}^2}$$

■

### 2.3 Grupos adimensionales y correlaciones

Al preguntar qué es un número adimensional†, la primera respuesta que viene a la mente es “un número sin dimensiones” (o “un número sin unidades”). Aunque en esencia correcto, es mucho más útil definir un número adimensional como *el resultado de dividir entre sí dos cantidades físicas que tienen las mismas dimensiones*.

Para ilustrar este concepto, considérese una circunferencia de diámetro  $D$ . Se sabe que se puede calcular su perímetro  $P$  empleando la fórmula  $P = \pi D$ . Sin embargo, desde otro punto de vista, se puede **definir**  $\pi$  como el resultado de dividir el perímetro de la circunferencia entre su diámetro (Figura 2.1)



$$\pi = \frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} = \frac{P}{D}$$

**Figura 2.1** El número adimensional  $\pi$  como el resultado de dividir dos longitudes.

Ambas cantidades,  $P$  y  $D$ , son longitudes, por lo que el resultado de esta división no tendrá unidades. Entonces, lo que representa  $\pi$  es *cuántas veces más grande es el perímetro de la circunferencia, comparado con su diámetro*. Si se camina alrededor de una circunferencia, se recorre 3.1415926... veces más distancia que si se cruza de lado a lado.

Todos los números adimensionales que se mencionan más adelante en la sección 2.2 pueden definirse como el cociente de dos cantidades físicas que tienen las mismas dimensiones. Al conceptualizarlos de esta manera, se facilita el análisis

\* El estudiante que ya tenga alguna familiaridad con los números adimensionales, reconocerá que los grupos obtenidos son los recíprocos del número de Reynolds y del número de Froude, que se presentan en la sección siguiente.

† Al hablar de *número adimensional*, no se restringe únicamente a un valor numérico. Este término también se usa con frecuencia para referirse a una combinación de variables cuyas unidades se cancelan, formando un *grupo adimensional*. Por ejemplo, el *número de Reynolds* se refiere tanto a la fórmula  $Re = \rho v D / \mu$  como al valor numérico que se obtiene de ella.

de casos en los que dicho número adimensional sea un valor grande o pequeño, entendiendo que dicho resultado depende de cuál de las dos cantidades físicas sea mayor o menor que la otra. Esto contribuye a entender más fácilmente el comportamiento de algunos sistemas en los que se involucra dicho número adimensional.

Por el contrario, una cantidad **adimensional** tiene el mismo valor independientemente del sistema de unidades que se use. Así,  $\pi = 3.141592654\dots$ , sin importar si el perímetro y el diámetro de una circunferencia se miden en metros, pulgadas, ångströms o años-luz (siempre y cuando *ambos* se midan en las mismas unidades).

### 2.3.1 Fuerzas impulsoras

¿Por qué ocurren los fenómenos físicos? ¿Por qué ocurren en la forma que ocurren? Lo que hace que suceda un fenómeno físico es una **fuerza impulsora**\* (en inglés, *driving force*). Por ejemplo, el calor se transfiere de un lugar a otro porque hay una diferencia de temperatura. Un colorante se difunde en agua porque hay una diferencia de concentración. Un objeto cae por acción de la gravedad, que implica una diferencia de energía potencial entre una altura y otra. Una corriente eléctrica fluye porque hay una diferencia de potencial eléctrico. Un objeto en movimiento es frenado por la fricción. Al relacionar entre sí diferentes fuerzas impulsoras, se puede identificar una serie de grupos dimensionales importantes para el fenómeno estudiado.

Por ejemplo, en mecánica de fluidos, uno de los números adimensionales más importantes es el **número de Reynolds**, habitualmente representado como  $Re$ , que relaciona las fuerzas inerciales y viscosas en un fluido en movimiento:

$$\text{Número de Reynolds: } Re = \frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}} \quad (2.1)$$

En este contexto, sin pretender ser muy rigurosos, se puede decir que las fuerzas inerciales se oponen a que el fluido *cambie su condición de movimiento*, y las fuerzas viscosas se oponen a que el fluido *se mueva*. Se analizará a continuación qué ocurre cuando la magnitud relativa de estas fuerzas es mayor o menor.

- ★ Cuando un fluido se mueve a *baja velocidad*, las fuerzas inerciales son pequeñas, comparadas con las fuerzas viscosas, por lo que el número de Reynolds tendrá un valor pequeño, que matemáticamente se suele plantear como  $Re \rightarrow 0$ . Imagínese que una porción del fluido “quisiera moverse en otra dirección” (una perturbación en la velocidad). En este caso, no tendría inercia suficiente para vencer las fuerzas viscosas, por lo que deberá “moverse ordenadamente con el resto del fluido”. Esto corresponde a la condición de *flujo laminar*, descrita en la Unidad 1, en la que el fluido se mueve en capas ordenadas.
- ★ Por otro lado, si el fluido se mueve a *alta velocidad*, las fuerzas inerciales son mucho mayores, comparadas con las fuerzas viscosas, y el número de Reynolds tendrá un valor grande, matemáticamente expresado como  $Re \rightarrow \infty$ . Ahora, si la porción imaginaria del fluido “quiere moverse en otra dirección”, su inercia es lo suficientemente alta y las fuerzas viscosas de las otras porciones del fluido “no la pueden detener”. En este caso, el flujo se vuelve caótico, moviéndose en todas direcciones, que es la condición de *flujo turbulento*, también descrita en la Unidad 1.

A partir de este análisis, se ha logrado entender que cuando el número de Reynolds tiene un valor pequeño el flujo será laminar, y cuando tenga un valor grande el flujo será turbulento, debido a la magnitud relativa de las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Se ha llegado a esta conclusión sin siquiera haber dado una fórmula para el número de Reynolds. Para el caso de *flujo dentro de una tubería*, el número de Reynolds es:

\* Al hablar de fuerza impulsora, no necesariamente es una fuerza en el sentido convencional de la mecánica.

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $v$  es la velocidad promedio del flujo,  $D$  es el diámetro interno de la tubería, y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. El flujo dentro de una tubería es laminar si el número de Reynolds es menor que 2100 y es turbulento para valores mayores a 4000, aproximadamente\*.

De la misma manera que se ha analizado el número de Reynolds, se podría analizar cada uno de los grupos adimensionales que se presentan en la Tabla 2.4, según la magnitud relativa de las fuerzas impulsoras involucradas.

**Tabla 2.4** Algunos grupos adimensionales en ingeniería química y sus fuerzas impulsoras.

Grupo	Fórmula	Fuerzas impulsoras	Principales aplicaciones
número de Arquímedes	$\text{Ar} = \frac{\rho_s(\rho_s - \rho)gL^3}{\mu^2}$	fuerzas gravitacionales fuerzas viscosas	flotación y sedimentación de partículas en un fluido
número de Bingham	$\text{Bm} = \frac{\tau_0 L}{\mu_\infty v}$	esfuerzo de cedencia esfuerzo viscoso	fluidos no newtonianos con esfuerzo de cedencia
número de Biot	$\text{Bi} = \frac{hL}{k_s}$	convección del fluido al sólido conducción en el sólido	transferencia de calor entre un fluido y un sólido
número de Bond	$\text{Bo} = \frac{\rho g L^2}{\sigma}$	fuerza gravitacional tensión superficial	formación de gotas o burbujas
número de Brinkman	$\text{Br} = \frac{\mu v^2}{k\Delta T}$	disipación viscosa conducción de calor	flujos con altos gradientes de velocidad
número de cavitación	$\text{Ca} = \frac{P - P_{\text{vap}}}{\frac{1}{2}\rho v^2}$	presión (relativa a presión de vapor) presión dinámica	formación de burbujas al bombear un líquido (cavitación)
coeficiente de arrastre	$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}$	fuerza de arrastre energía cinética del fluido	flujo alrededor de objetos, fuerza paralela al movimiento
coeficiente de sustentación	$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}$	fuerza de sustentación energía cinética del fluido	flujo alrededor de objetos, fuerza perpendicular al movimiento
número de Damkhöler	$\text{Da} = \frac{kC_0^{n-1}}{k_g a}$	velocidad de reacción química rapidez de transferencia de masa	reacciones químicas heterogéneas (catálisis)
número de Eckert	$\text{Ec} = \frac{v^2}{c_p \Delta T}$	energía cinética entalpía	disipación de calor en capa límite
número de Euler	$\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v^2}$	diferencia de presión presión dinámica	variaciones de presión en un fluido en movimiento
factor de fricción de Darcy	$f_D = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v^2} \cdot \frac{D}{L}$	caída de presión energía cinética	pérdida de energía de un fluido en una tubería
factor de fricción de Fanning	$f_F = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho v^2}$	fuerza de fricción en la pared energía cinética del fluido	fuerzas viscosas ejercidas sobre la pared de una tubería
número de Fourier	$\text{Fo} = \frac{at}{L^2}$	tiempo tiempo de difusión térmica	transferencia de calor en estado transitorio

\* Otras geometrías de flujo tienen fórmulas ligeramente diferentes para el número de Reynolds y valores de transición entre flujo laminar y turbulento diferentes, pero eso queda más allá del propósito de este curso.

Grupo	Fórmula	Fuerzas impulsoras	Principales aplicaciones
número de Froude	$Fr = \frac{v^2}{gL}$	$\frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza gravitacional}}$	comportamiento de una superficie líquida
número de Grashof	$Gr = \frac{g\rho^2\beta \Delta T L^3}{\mu^2}$	$\frac{\text{fuerza de flotación}}{\text{fuerza viscosa}}$	transferencia de calor por convección libre
número de Jakob	$Ja = \frac{c_p(T - T_{sat})}{\lambda}$	$\frac{\text{calor sensible}}{\text{calor latente}}$	transferencia de calor con cambio de fase
número de Lewis	$Le = \frac{\alpha}{\mathcal{D}_{AB}}$	$\frac{\text{difusión térmica}}{\text{difusión molecular}}$	transferencia simultánea de calor y masa
número de Mach	$Ma = \frac{v}{c}$	$\frac{\text{velocidad}}{\text{velocidad del sonido}}$	flujo a altas velocidades
número de Nusselt	$Nu = \frac{hL}{k}$	$\frac{\text{convección del fluido al sólido}}{\text{conducción en el fluido}}$	transferencia de calor por convección
número de Péclet	$Pe = \frac{Lv}{\alpha}$	$\frac{\text{advección}}{\text{conducción}}$	transferencia de calor por convección
número de potencia	$N_p = \frac{\dot{W}}{\rho N^3 D^5}$	$\frac{\text{arrastre del agitador}}{\text{fuerza inercial}}$	agitación y mezclado
número de Prandtl	$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$	$\frac{\text{difusión viscosa}}{\text{difusión térmica}}$	transferencia de calor por convección
número de Rayleigh	$Ra = \frac{g\rho\beta \Delta T L^3}{\mu\alpha}$	$\frac{\text{fuerza de flotación}}{\text{fuerza viscosa}}$	transferencia de calor por convección libre
número de Reynolds	$Re = \frac{\rho vL}{\mu}$	$\frac{\text{fuerza inercial}}{\text{fuerza viscosa}}$	flujo de fluidos
número de Schmidt	$Sc = \frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}}$	$\frac{\text{difusión viscosa}}{\text{difusión molecular}}$	transferencia de masa por convección
número de Sherwood	$Sh = \frac{kL}{\mathcal{D}_{AB}}$	$\frac{\text{convección de masa}}{\text{difusión molecular}}$	transferencia de masa por convección
número de Stanton	$St = \frac{h}{\rho C_p v}$	$\frac{\text{convección}}{\text{capacidad térmica}}$	transferencia de calor por convección
módulo de Thiele	$\phi = L\sqrt{\frac{kC_0^{n-1}}{\mathcal{D}_{AB}}}$	$\frac{\text{velocidad de reacción química}}{\text{rapidez de difusión molecular}}$	reacciones químicas heterogéneas (catálisis)
número de Weber	$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$	$\frac{\text{fuerza inercial}}{\text{tensión superficial}}$	formación de gotas o burbujas

### 2.3.2 Correlaciones

En ingeniería, se le llama **correlación** a la relación entre dos o más variables, obtenida a partir de datos experimentales, que permite predecir una de ellas a partir de las otras. Esta relación puede presentarse en forma gráfica o como una ecuación empírica.

Una correlación se puede obtener a partir de datos experimentales de cualquier variable, en cualquier sistema de unidades. Sin embargo, es ventajoso trabajar con números adimensionales, para que la correlación obtenida será más general y no dependa del sistema de unidades.

Como ejemplo, considérese el comportamiento de un gas. Una de las primeras ecuaciones que se estudian en cualquier curso de termodinámica es la ley de gas ideal, donde  $P$  es la presión,  $v$  es el volumen específico ( $v = V/n$ , volumen entre el número de moles),  $R$  es la constante universal de los gases, y  $T$  es la temperatura absoluta:

$$Pv = RT \quad (2.3)$$

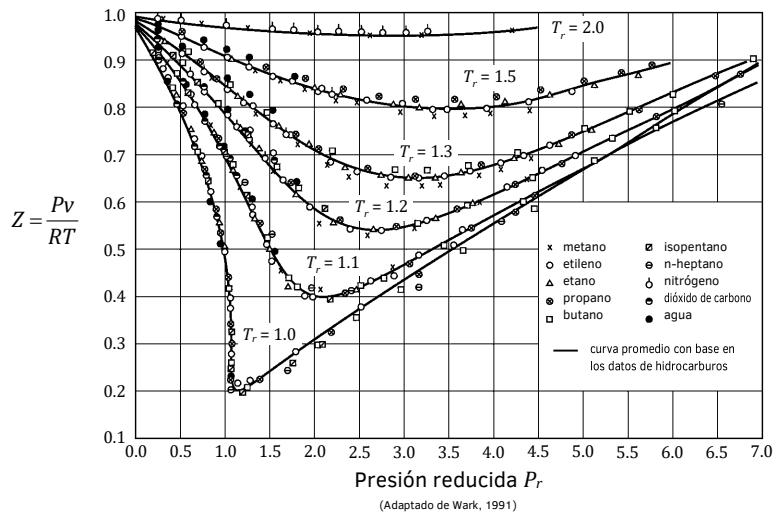
Sin embargo, cuando la presión es alta o la temperatura es baja, el comportamiento del gas comienza a desviarse de lo predicho por la ley de gas ideal. Una de las opciones más directas para tratar de tomar en cuenta esta desviación, es introducir un factor de corrección  $Z$ , llamado “factor de compresibilidad”:

$$Pv = ZRT \quad (2.4)$$

En principio,  $Z$  se puede determinar experimentalmente: medir presión, volumen específico y temperatura del gas, y luego calcular  $Z = Pv / RT$ . Sin embargo, esta alternativa es de limitada aplicación práctica: el valor de  $Z$  necesitaría ser determinado para variedad de condiciones termodinámicas. Además, diferentes gases tendrán diferente valor de  $Z$ , incluso si la temperatura, presión y volumen específico son iguales.

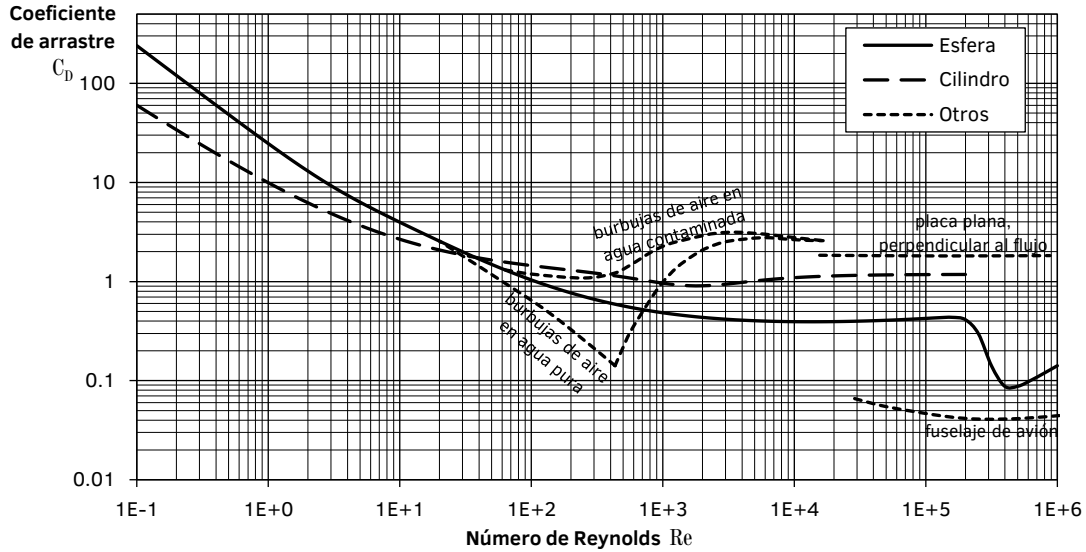
Entonces surge la pregunta: ¿es posible predecir el valor de  $Z$  a partir de alguna otra información conocida del gas? De ser así, no sería necesario medirlo experimentalmente cada vez, sino que sería estimado a partir de una correlación.

En este caso, es conveniente emplear como variables adimensionales la *temperatura reducida*  $T_r = T / T_c$  y la *presión reducida*  $P_r = P / P_c$ . Al graficar los datos experimentales de  $Z$  para diferentes sustancias, coinciden aproximadamente en el mismo lugar cuando tienen el mismo valor de  $T_r$  y  $P_r$ , es decir, que  $Z$  está *correlacionada* con  $T_r$  y  $P_r$ . En este caso, se muestra la relación en forma gráfica en la Figura 2.2.



**Figura 2.2** Ejemplo de correlación gráfica: diagrama de compresibilidad.

Otro ejemplo de correlación es la fuerza de arrastre ejercida por un fluido sobre un objeto, que ha sido extensamente estudiada en mecánica de fluidos. Esta fuerza se representa adimensionalmente con el coeficiente de arrastre  $C_D$ , mientras que la velocidad del fluido está caracterizada por el número de Reynolds  $Re$ . La Figura 2.3 muestra la relación entre estos dos parámetros para una esfera, un cilindro infinitamente largo, y algunas otras geometrías.



Esfera: correlación de Morrison (2013). Cilindro: correlación de Sucker y Brauer (1975) citada en White (1991). Otros datos: adaptados de White (1986) y Perry (2002).

**Figura 2.3** Ejemplo de correlación gráfica: coeficiente de arrastre.

Al paso de los años, se han propuesto diversas ecuaciones que representen satisfactoriamente esta relación para el caso de una esfera, dentro de cierto rango del número de Reynolds. Algunas de estas correlaciones se muestran en la Tabla 2.5, donde puede apreciarse la complejidad matemática variable, que refleja la búsqueda de un mejor ajuste a los datos experimentales.

**Tabla 2.5** Ejemplos de correlaciones del coeficiente de arrastre para esferas.

AUTOR	CORRELACIÓN	CONDICIONES
Stokes (1851)	$C_D = \frac{24}{Re}$	$Re < 1$
Oseen (1910)	$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right)$	$Re < 5$
Schiller and Naumann (1933)	$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687})$	$Re < 800$
Dallavalle (1948)	$C_D = (0.632 + 4.8 Re^{-0.5})^2$	$Re < 2 \times 10^5$
Putnam (1961)	$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + \frac{1}{6} Re^{2/3} \right)$ $C_D = 0.439$	$Re < 10^3$ $10^3 \leq Re < 3 \times 10^5$
Clift and Gauvin (1970)	$C_D = \frac{24}{Re} \left( 1 + 0.15 Re^{0.687} + \frac{0.0175 Re}{1 + 4.25 \times 10^4 Re^{-1.16}} \right)$	$Re < 3 \times 10^5$
White (1991)	$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + Re^{0.5}} + 0.4$	$Re \leq 2 \times 10^5$
Morrison (2013)	$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{2.6 \left( \frac{Re}{5} \right)}{1 + \left( \frac{Re}{5} \right)^{1.52}} + \frac{0.411 \left( \frac{Re}{263000} \right)^{-7.94}}{1 + \left( \frac{Re}{263000} \right)^{-8}} + \frac{Re^{0.8}}{461000}$	$Re < 1 \times 10^6$

Algunos ejemplos de correlaciones para transferencia de calor y transferencia de masa se muestran en las Tablas 2.6 y 2.7. Evidentemente, no es posible incluir en esta exposición todas las correlaciones existentes, incluso las de uso frecuente, puesto que caen más allá del propósito de este curso. Únicamente se presentan para *ejemplificar* el tipo de correlaciones que se presentan en Fenómenos de Transporte (y subsecuentemente en Operaciones Unitarias).

**Tabla 2.6** Ejemplos de correlaciones en transferencia de calor.

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES
Convección forzada en flujo paralelo sobre una placa plana	$Nu_x = 0.332Re_x^{1/2}Pr^{1/3}$	capa laminar, coeficiente local, $Re_x < 5 \times 10^5$ , $0.5 < Pr < 50$
	$\bar{Nu}_L = 0.664Re_L^{1/2}Pr^{1/3}$	capa laminar, coeficiente promedio, $Re_L < 5 \times 10^5$ , $0.6 < Pr < 50$
	$Nu_x = 0.0296Re_x^{4/5}Pr^{1/3}$	capa turbulenta, coeficiente local, $5 \times 10^5 < Re_L < 10^8$ , $0.5 < Pr < 60$
	$\bar{Nu}_L = (0.037Re_L^{4/5} - 871)Pr^{1/3}$	capa laminar y turbulenta, coeficiente promedio, $5 \times 10^5 < Re_L < 10^8$ , $0.5 < Pr < 60$
Convección forzada alrededor de un cilindro	$\bar{Nu}_D = (0.473 + 0.528Re_D^{1/2})Pr^{1/3}$	coeficiente promedio, $Re_D < 500$ , $Pr > 0.5$
	$\bar{Nu}_D = (0.506Re_D^{1/2} + 0.0014Re_D)Pr^{1/3}$	coeficiente promedio, $Re_D > 500$ , $Pr > 0.5$
Convección forzada alrededor de una esfera	$\bar{Nu}_D = (2.2 + 0.48Re_D^{1/2})Pr$	gases, coeficiente promedio, $1 < Re_D < 25$
	$\bar{Nu}_D = 0.37Re_D^{0.6}Pr^{1/3}$	gases, coeficiente promedio, $20 < Re_D < 1.5 \times 10^5$
Convección forzada dentro de una tubería circular, temperatura uniforme en la pared	$Nu_D = 3.66$	flujo laminar completamente desarrollado, $Re_D < 2100$ , $Pr > 0.6$
	$\bar{Nu}_D = 0.023Re_D^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	flujo turbulento, $Re_D > 10^4$ , $0.6 < Pr < 400$
Convección libre alrededor de un cilindro horizontal	$\bar{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387Ra_D^{1/6}}{\left[ 1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$	$Ra_D < 10^{12}$
Convección libre alrededor de una esfera	$\bar{Nu}_D = 2 + \frac{0.589Ra_D^{1/4}}{\left[ 1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}}$	$Ra_D < 10^{11}$

**Tabla 2.7** Ejemplos de correlaciones en transferencia de masa.

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES
Flujo alrededor de una esfera	$\bar{Sh}_D = 2 + 0.552Re_D^{0.53}Sc^{1/3}$	gases, $1 < Re_D < 4.8 \times 10^4$ , $0.6 < Sc < 2.7$
Burbujas individuales de gas puro en un líquido	$\bar{Sh}_D = (Re_D Sc)^{1/3}$	burbujas pequeñas ( $D < 1$ mm)
	$\bar{Sh}_D = 1.13(Re_D Sc)^{1/3}$	burbujas medianas y grandes ( $D > 5$ mm)
Flujo dentro de una tubería circular	$\bar{Sh}_D = 0.023Re_D^{0.83}Sc^{1/3}$	$4 \times 10^3 < Re_D < 6 \times 10^4$ , $0.6 < Sc < 3000$
	$\bar{Sh}_D = 0.0149Re_D^{0.88}Sc^{1/3}$	$10^4 < Re_D < 4 \times 10^5$ , $Sc > 100$

Es importante destacar que este tipo de correlaciones mantiene su carácter *empírico*: se obtuvieron a partir de datos experimentales, no en una deducción a partir de leyes fundamentales (salvo escasas excepciones). Si diferentes observaciones generan información coincidente, aumenta la confianza en la correlación, pero no hay garantía de que sea válida siempre. Incluso para los casos analizados, es riesgoso extrapolar fuera del rango original de condiciones. Una correlación sólo proporciona una *estimación* del parámetro buscado.

## 2.4 Similitud y escalamiento

El escalamiento es una de las herramientas más poderosas a disposición de la ingeniería. Supongamos, por ejemplo, que una compañía está planeando un nuevo diseño de un avión. Evidentemente, no lo van a construir a escala real para probar “a ver si vuela”. Se construye primero un modelo a escala reducida (Figura 2.4) con el que se realizan mediciones que proporcionan información valiosa sobre el diseño del avión. El tamaño del modelo y las condiciones en las que se prueba no se eligen arbitrariamente, sino que deben cumplir ciertos criterios de **similitud**, que dan la certeza de que los datos recopilados pueden usarse para predecir el comportamiento del avión real.



NASA, X-48B Blended Wing Body, [https://blogs.nasa.gov/nasa360/2009/07/21/post\\_1248183846997/](https://blogs.nasa.gov/nasa360/2009/07/21/post_1248183846997/)

**Figura 2.4** Prototipo a escala reducida de una aeronave.

Dos sistemas a escalas diferentes son similares si los parámetros adimensionales relevantes tienen el mismo valor en ambos sistemas. En problemas de mecánica de fluidos, generalmente se consideran tres tipos de similitud: geométrica, cinemática y dinámica.

### 2.4.1 Similitud geométrica

Para tener similitud geométrica todas las **longitudes** correspondientes deben ser proporcionales, y todos los **ángulos** correspondientes deben ser iguales (formas similares). Se suele decir que la similitud geométrica implica que el modelo debe ser una ampliación o reducción “fotográfica” del sistema que se quiere modelar. La Figura 2.5 ilustra la similitud geométrica para dos objetos simples.

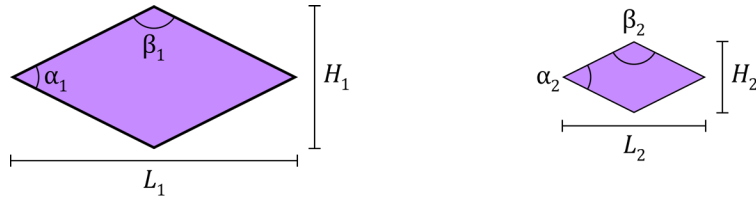


Figura 2.5 Similitud geométrica.

En este ejemplo, el rombo de la derecha está construido a una escala menor que el rombo de la izquierda. Cada rombo tiene una cierta longitud,  $L_1$  y  $L_2$ , y una cierta altura,  $H_1$  y  $H_2$ , respectivamente. Si se divide una de estas distancias de uno de los rombos entre la correspondiente del otro rombo, debe obtenerse una constante:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{H_1}{H_2} = \text{constante} \quad (2.5)$$

Es decir, por ejemplo, si la longitud  $L_1$  es el doble que  $L_2$ , entonces la altura  $H_1$  también debe ser el doble que  $H_2$ . Además, los ángulos en el rombo de la izquierda,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , deben ser iguales a los correspondientes en el rombo de la derecha,  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ :

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2 \quad (2.6)$$

Se tiene similitud geométrica cuando todos los grupos adimensionales que representen proporciones de distancias (por ejemplo  $L/H$ ) son iguales en ambas escalas. Este tipo de grupo adimensional se conoce frecuentemente como **relación de aspecto**. Entonces, igualando este grupo adimensional para el caso 1 con el mismo para el caso 2 se tiene:

$$\left(\frac{L}{H}\right)_1 = \left(\frac{L}{H}\right)_2 \quad (2.7)$$

que se puede escribir también como:

$$\frac{L_1}{H_1} = \frac{L_2}{H_2} \quad (2.8)$$

Nótese que esta última ecuación es equivalente a la ecuación 2.5.

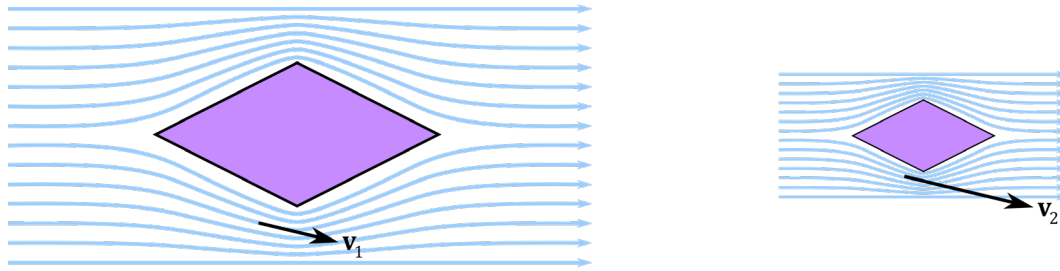
La similitud geométrica también está relacionada con las proporciones de áreas y volúmenes, ya que éstas son proporcionales a la longitud al cuadrado y al cubo, respectivamente:

$$A \propto L^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{L_1^2}{L_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \quad (2.9)$$

$$V \propto L^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1^3}{L_2^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3 \quad (2.10)$$

### 2.4.2 Similitud cinemática

Para tener similitud cinemática, las **velocidades** en una escala y la otra deben ser proporcionales (movimiento similar). En la Figura 2.6 se muestran los mismos rombos de ejemplo, situados ahora en un fluido en movimiento.



**Figura 2.6** Similitud cinemática.

En cualquier punto alrededor del rombo 1 el fluido tendrá cierta velocidad  $\mathbf{v}_1$  (con componentes  $v_{x1}$ ,  $v_{y1}$  y  $v_{z1}$ ), y el punto geoméricamente correspondiente alrededor del rombo 2 tendrá otra velocidad  $\mathbf{v}_2$  (con componentes  $v_{x2}$ ,  $v_{y2}$  y  $v_{z2}$ ). Si se divide la magnitud de la velocidad en un caso entre la magnitud de la correspondiente velocidad del otro caso, debe obtenerse una constante. Además, al dividir las correspondientes componentes, también debe obtenerse la misma constante:

$$\frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_2|} = \text{constante} \quad (2.11)$$

$$\frac{v_{x1}}{v_{x2}} = \frac{v_{y1}}{v_{y2}} = \frac{v_{z1}}{v_{z2}} = \text{constante} \quad (2.12)$$

Nótese que esta constante generalmente es diferente que la constante de la similitud geométrica: si un modelo tiene exactamente la mitad de tamaño que el otro, la velocidad del fluido no será la mitad, pudiendo incluso ser mayor en el caso de menor escala. Además, para tener similitud cinemática es requisito indispensable tener similitud geométrica. Si los ángulos fueran diferentes en una escala y en la otra, el fluido adyacente llevaría direcciones diferentes, por lo que no podría cumplirse la similitud geométrica.

Dado que el **número de Reynolds** es el grupo adimensional que tiene más relación con el movimiento del fluido (especialmente si es laminar o turbulento), suele igualarse en ambos modelos como requisito para tener similitud cinemática:

$$Re_1 = Re_2 \quad (2.13)$$

### 2.4.3 Similitud dinámica

Se tiene similitud dinámica, cuando las **fuerzas** relevantes en ambas escalas son proporcionales (fuerzas similares). Continuando con el ejemplo de las secciones anteriores, se muestran los mismos rombos en la Figura 2.7.

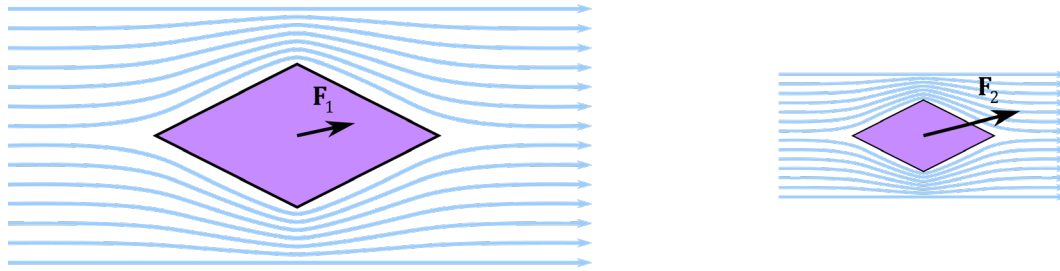


Figura 2.7 Similitud dinámica.

En este caso, se muestra la fuerza  $\mathbf{F}_1$  que ejerce el fluido sobre el rombo 1, (con componentes  $F_{x1}$ ,  $F_{y1}$  y  $F_{z1}$ ), y la fuerza  $\mathbf{F}_2$  correspondiente que el fluido ejerce en el rombo 2 (con componentes  $F_{x2}$ ,  $F_{y2}$  y  $F_{z2}$ ). Como en el caso de la similitud cinemática, si se divide la magnitud de esta fuerza de un caso entre la magnitud de la fuerza del otro caso, debe obtenerse una constante, lo mismo que si se dividen las componentes correspondientes.

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} = \text{constante} \quad (2.14)$$

$$\frac{F_{x1}}{F_{x2}} = \frac{F_{y1}}{F_{y2}} = \frac{F_{z1}}{F_{z2}} = \text{constante} \quad (2.15)$$

Nuevamente, el valor de esta constante será diferente que la constante de la similitud geométrica y que la constante de la similitud cinemática: si un modelo tiene exactamente la mitad de tamaño que el otro, la fuerza ejercida no será la mitad. Es evidente también que para poder tener similitud dinámica se requiere cumplir con la similitud geométrica y la similitud cinemática.

Para la similitud dinámica, es necesario igualar el número o números adimensionales donde aparezcan las fuerzas de *relevantes* para lo que se quiere estudiar con el modelo a escala. La Tabla 2.8 incluye algunos números adimensionales empleados en la similitud dinámica.

Tabla 2.8 Algunos números adimensionales empleados para similitud dinámica.

Fuerza relevante	Número relevante
Fuerzas de presión	Euler
Fuerzas de gravedad (en superficies de líquidos)	Froude
Fuerzas de flotación	Arquímedes
Tensión superficial	Weber o Bond
Fuerza de arrastre	Coefficiente de arrastre
Fuerza de sustentación	Coefficiente de sustentación

## 2.4.4 Escalamiento

El escalamiento consiste en *predecir el comportamiento de un sistema en cierta escala a partir del estudio de un modelo a una escala diferente* (ya sea menor o mayor). Se basa en el hecho de que, cuando las ecuaciones que describen un

fenómeno se expresan de forma adimensional, todos los parámetros físicos quedan recolectados en ciertos grupos adimensionales. Si dichos grupos tienen el mismo valor numérico en una escala y en otra, la ecuación adimensional es idéntica y tendrá por lo tanto la misma solución.

Incluso en los casos en los que el fenómeno analizado sea tan complejo que no se pueda representar como una ecuación adimensional, existe una relación funcional subyacente entre ciertos grupos adimensionales. Identificando dichos grupos, y haciendo que tengan el mismo valor en una escala y en la otra, se garantiza que la relación funcional sea la misma.

En teoría, se puede igualar todos excepto uno de los números adimensionales en ambos sistemas. Para igualarlos todos, se requeriría que ambos sistemas tuvieran la misma escala. Afortunadamente, la mayoría de los números adimensionales involucran fuerzas que no son relevantes para el caso analizado, por lo que basta igualar aquellos números en los que sí aparezcan fuerzas relevantes (Tabla 2.8).

### EJEMPLO 2.4

Se desea estimar la fuerza de arrastre del viento sobre un globo meteorológico de 3 m de diámetro, mediante pruebas con un modelo a escala reducida. A la altitud donde volará el globo, la densidad y viscosidad del aire son  $0.89 \text{ kg/m}^3$  y  $174 \text{ } \mu\text{P}$ , y se espera que el viento sople a  $1.5 \text{ m/s}$ . El modelo de prueba será una esfera de  $50 \text{ mm}$  de diámetro, colocada en una corriente de agua cuya densidad es  $997 \text{ kg/m}^3$  y su viscosidad es  $0.855 \text{ cP}$ . Bajo condiciones de similitud dinámica, la fuerza de arrastre medida sobre el modelo es  $3.47 \text{ N}$ . Calcule a qué velocidad debe moverse el agua en el modelo y cuál es la fuerza de arrastre esperada sobre el globo real.

### SOLUCIÓN

Se comienza estableciendo los datos conocidos para el globo (escala 1) y para el modelo (escala 2) así como las variables buscadas:

Globo aerostático (escala 1)	Modelo de prueba (escala 2)
$D_1 = 3 \text{ m}$	$D_2 = 50 \text{ cm}$
$\rho_1 = 0.89 \text{ kg/m}^3$	$\rho_2 = 997 \text{ kg/m}^3$
$\mu_1 = 174 \text{ } \mu\text{P}$	$\mu_2 = 0.855 \text{ cP}$
$v_1 = 1.5 \text{ m/s}$	$v_2 = ?$
$F_{D1} = ?$	$F_{D2} = 3.47 \text{ N}$

Como interesa la fuerza de arrastre  $F_D$ , el coeficiente de arrastre es el número adimensional relevante para la similitud dinámica, y el número de Reynolds (con el diámetro como longitud característica) para la similitud cinemática:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v^2 A} \quad \text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu}$$

Igualando el número de Reynolds es posible determinar la velocidad en el modelo:

$$(\text{Re})_1 = (\text{Re})_2$$

$$\frac{\rho_1 v_1 D_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 D_2}{\mu_2}$$

$$v_2 = v_1 \frac{\rho_1 D_1 \mu_2}{\rho_2 D_2 \mu_1}$$

Sustituyendo los datos conocidos:

$$v_2 = 1.5 \text{ m/s} \left( \frac{0.89 \text{ kg/m}^3}{997 \text{ kg/m}^3} \right) \left( \frac{3 \text{ m}}{0.05 \text{ m}} \right) \left( \frac{8550 \text{ } \mu\text{P}}{174 \text{ } \mu\text{P}} \right)$$

$$v_2 = 3.95 \text{ m/s}$$

Para encontrar la fuerza de arrastre sobre el globo, se iguala el coeficiente de arrastre:

$$(C_D)_1 = (C_D)_2$$

$$\frac{F_{D1}}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 A_1} = \frac{F_{D2}}{\frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 A_2}$$

$$F_{D1} = F_{D2} \frac{\rho_1 v_1^2 A_1}{\rho_2 v_2^2 A_2}$$

Aún cuando en este caso es posible calcular las áreas de sección transversal  $A_1$  y  $A_2$  porque se conocen los diámetros, se puede aprovechar la similitud geométrica:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

$$F_{D1} = F_{D2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^2 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2$$

Sustituyendo valores:

$$F_{D1} = 3.47 \text{ N} \left( \frac{0.89 \text{ kg/m}^3}{997 \text{ kg/m}^3} \right) \left( \frac{1.5 \text{ m/s}}{3.95 \text{ m/s}} \right)^2 \left( \frac{3 \text{ m}}{0.05 \text{ m}} \right)^2$$

$$F_{D1} = 1.61 \text{ N}$$

Es interesante observar que, aunque el modelo es 60 veces más pequeño, la velocidad del agua debe ser mayor, y la fuerza en la esfera es menos de la mitad que la que sentiría el globo. Sin embargo, al tener igual valor de Reynolds y del coeficiente de arrastre, los criterios de similitud garantizan que la información obtenida con el modelo es aplicable al globo real. ■

**EJEMPLO 2.5**

Adaptado de Bird et al. (2002).

Se pretende diseñar un gotero para administrar un medicamento en solución. Se sabe que, en este caso, la masa de las gotas producidas (expresada de forma adimensional como  $m^* = m / \rho D^3$ ) depende únicamente del número de Bond ( $Bo = \rho g D^2 / \sigma$ ). Conociendo la densidad  $\rho$  y la tensión superficial  $\sigma$  del agua destilada a 20 °C (usada como modelo) y del medicamento (aplicación real), determinar la proporción de los diámetros de los goteros ( $D_2 / D_1$ ) y la proporción de las masas ( $m_2 / m_1$ ) de las gotas producidas.

	① agua a 20 °C	② medicamento
densidad	$\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3$	$\rho_2 = 1340 \text{ kg/m}^3$
tensión superficial	$\sigma_1 = 0.0729 \text{ N/m}$	$\sigma_2 = 0.0470 \text{ N/m}$

**SOLUCIÓN**

Se comienza igualando el número de Bond para ambos casos:

$$Bo_1 = Bo_2$$

$$\frac{\rho_1 g_1 D_1^2}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 g_2 D_2^2}{\sigma_2}$$

Reacomodando para encontrar  $D_2 / D_1$ :

$$\frac{D_2^2}{D_1^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{g_1}{g_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$\left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

donde la gravedad se ha eliminado por tener el mismo valor en ambos casos, y se ha utilizado las leyes de los exponentes para escribir  $D_2^2 / D_1^2$  como  $(D_2 / D_1)^2$ . Elevando todo a la 1/2:

$$\frac{D_2}{D_1} = \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^{1/2}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{D_2}{D_1} = \left( \frac{998 \text{ kg/m}^3}{1340 \text{ kg/m}^3} \times \frac{0.0470 \text{ N/m}}{0.0729 \text{ N/m}} \right)^{1/2}$$

$$\frac{D_2}{D_1} = 0.6929$$

Ahora, para la relación de las masas, se iguala la masa adimensional para ambos casos:

$$m^*_1 = m^*_2$$

$$\frac{m_1}{\rho_1 D_1^3} = \frac{m_2}{\rho_2 D_2^3}$$

Reacomodando:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1340 \text{ kg/m}^3}{998 \text{ kg/m}^3} (0.6929)^3$$

$$\frac{m_2}{m_1} = 0.4468$$

Nótese que, aunque no se conocen los diámetros  $D_1$  y  $D_2$  de forma individual, sí es posible utilizar en los cálculos la relación  $D_2 / D_1$  como una sola cantidad. ■

### III. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpreta la ley de Newton de la viscosidad a partir de los elementos que la componen y su comportamiento.</li> <li>Determina la viscosidad en gases, mezclas de gases, líquidos y mezclas de líquidos, utilizando las correlaciones y gráficas correspondientes.</li> <li>Identifica el arrastre y la sustentación como mecanismos de transferencia convectiva de momentum.</li> </ul>		
COMPETENCIAS GENÉRICAS	INSTRUMENTALES	INTERPERSONALES	SISTÉMICAS
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas.</li> <li>Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.</li> <li>Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Capacidad de trabajo en equipo.</li> <li>Capacidad crítica y autocrítica.</li> <li>Compromiso ético.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Habilidad para trabajar en forma autónoma.</li> <li>Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.</li> <li>Capacidad para actuar en nuevas situaciones.</li> <li>Compromiso con la calidad.</li> </ul>

Al hablar de momentum\* en ingeniería química, se tiene como principal aplicación al movimiento de líquidos y gases en un proceso químico. Por lo tanto, al comenzar con el estudio de la transferencia de momentum, es conveniente recordar los conceptos plasmados originalmente por Sir Isaac Newton, en su libro *Principia Mathematica*:

#### DEFINITION II

*The quantity of motion is the measure of the same, arising from the velocity and quantity of matter conjointly.*

“La cantidad de movimiento es la medida de lo mismo, surgiendo de la velocidad y cantidad de materia conjuntamente.”

Es decir, se define una propiedad física, el **momentum**  $\mathbf{p}$ , como el producto de la masa  $m$  por la velocidad  $\mathbf{v}$ . Dado que la masa una cantidad escalar y la velocidad es un vector, el momentum tiene también carácter vectorial.

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (3.1)$$

Luego, se tiene la definición original de la segunda ley de Newton:

#### LAW II

*The change of motion is proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.*

“El cambio del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impuesta; y se hace en la dirección de la línea recta en la cual esa fuerza es impuesta.”

Entonces, una fuerza produce un movimiento, y está relacionada con la rapidez con la que cambia el momentum:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (3.2)$$

Esta forma de la segunda ley puede expresarse de la manera habitual sustituyendo la Ecuación 3.1 en la Ecuación 3.2, recordando que la masa no cambia con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3.3)$$

\* Momentum, cantidad de movimiento, momento, y momento lineal son sinónimos.

La conclusión más importante de este análisis es que los conceptos de momentum y fuerza están íntimamente relacionados. *Necesariamente, para que exista un movimiento debe generarlo una fuerza. El momentum producido, al desaparecer, debe convertirse en una fuerza.* Esta relación entre fuerza y momentum será fundamental para entender los mecanismos de transferencia de momentum (transporte viscoso, arrastre y sustentación) que se describen con más detalle a continuación.

### 3.1 Transporte viscoso

El **transporte viscoso** es el mecanismo molecular de transferencia de momentum. En un flujo laminar, se puede visualizar como una fuerza ejercida por una capa de fluido actuando sobre otra capa de fluido<sup>\*</sup>. En un flujo turbulento el análisis es más complejo, pero obedece los mismos principios básicos.

#### 3.1.1 Descripción del transporte viscoso

Para entender el transporte viscoso, es necesario primero enunciar el siguiente concepto, que es muy importante en mecánica de fluidos:

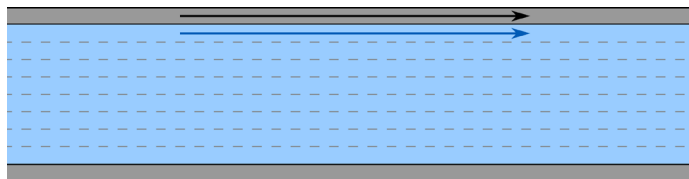
- ★ **Condición de no deslizamiento** (en inglés, *no-slip condition*): La velocidad de la capa de un fluido en contacto con una superficie sólida es igual a la velocidad del sólido<sup>†</sup>.

Considérese ahora un fluido inicialmente en reposo entre dos placas planas paralelas (Figura 3.1). El tamaño de dichas placas es mucho mayor que el espacio entre ellas, por lo que se pueden asumir infinitamente anchas.



**Figura 3.1** Transporte viscoso: fluido inicialmente en reposo.

Al aplicar una fuerza a la placa superior, ésta se moverá con una cierta velocidad. La primera capa de fluido, en contacto con la placa superior, también se moverá con la misma velocidad, debido a la condición de no deslizamiento. Las otras capas permanecen aún en su condición inicial de reposo (Figura 3.2).

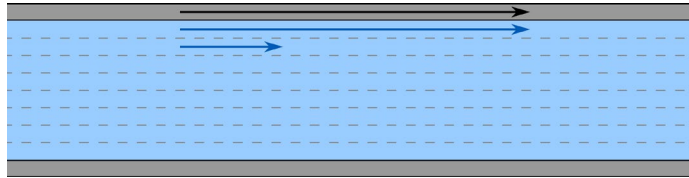


**Figura 3.2** Transporte viscoso: placa superior en movimiento.

<sup>\*</sup> Es importante destacar que estas "capas" no existen en realidad como regiones definidas en el fluido. Sólo son un concepto que ayuda a visualizar el transporte viscoso; se imaginan como láminas infinitesimalmente delgadas.

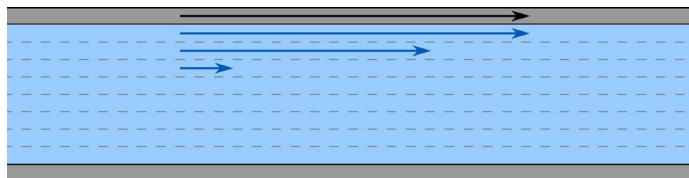
<sup>†</sup> Esta condición generalmente se enuncia para el caso de una interfase sólido-fluido. En el caso de una interfase fluido-fluido, la velocidad de ambos fluidos es la misma en las capas en contacto a ambos lados de la interfase.

Debido al transporte viscoso, la primera capa ejerce una fuerza sobre la segunda, venciendo su inercia, y poniéndola en movimiento: se puede decir que la primera capa está jalando a la segunda (Figura 3.3).



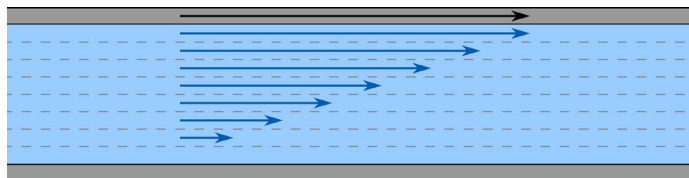
**Figura 3.3** Transporte viscoso: segunda capa en movimiento.

Ahora que la segunda capa de fluido se está moviendo, ejerce a su vez una fuerza sobre la tercera capa, poniéndola también en movimiento (Figura 3.4).



**Figura 3.4** Transporte viscoso: momentum pasando de capa en capa.

Este proceso continúa actuando de capa en capa hacia abajo, hasta la última capa, en contacto con la placa inferior. Nuevamente, por la condición de no deslizamiento, la velocidad de esta capa es cero porque la placa no se mueve. Así, se obtiene un perfil de velocidades en el fluido, en el que cada capa de fluido tiene una cierta velocidad (Figura 3.5).



**Figura 3.5** Transporte viscoso: perfil de velocidades.

Como resultado de este proceso, queda claro que hubo una **transferencia de momentum**, porque las capas de fluido que antes estaban en reposo ahora están en movimiento. En este ejemplo, el momentum tiene dirección horizontal (que es la dirección de la velocidad) pero el transporte viscoso ocurrió verticalmente, pasando de capa en capa de arriba hacia abajo. El transporte viscoso siempre ocurre en la dirección de las capas de mayor velocidad hacia las capas de menor velocidad, a través de un **gradiente de velocidad**<sup>\*</sup>.

### 3.1.2 Ejemplos de transporte viscoso

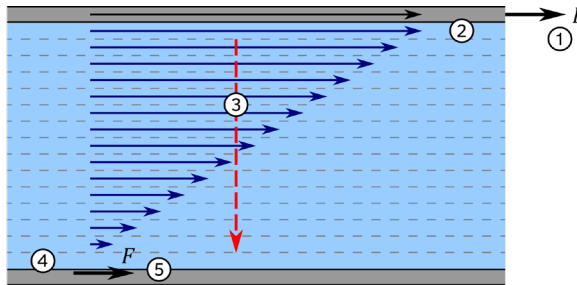
A continuación, se exponen dos casos clásicos de flujo laminar en estado estable, el *flujo de Couette* y el *flujo de Poiseuille*, y se describe paso a paso la transferencia de momentum que ocurre en cada uno. Nótese que el caso

<sup>\*</sup> De hecho, si dos capas se mueven a la misma velocidad, el gradiente es cero, no hay fuerzas viscosas, y no se transfiere momentum.

descrito previamente en las Figuras 3.1 a 3.5 corresponde al caso transitorio del flujo de Couette, donde la velocidad estaba cambiando con respecto al tiempo.

### 3.1.2.1 Transporte viscoso en el flujo de Couette

En el **flujo de Couette** (Figura 3.6), el fluido se encuentra entre dos placas planas paralelas, una de las cuales se mueve a cierta velocidad, y la otra permanece fija.

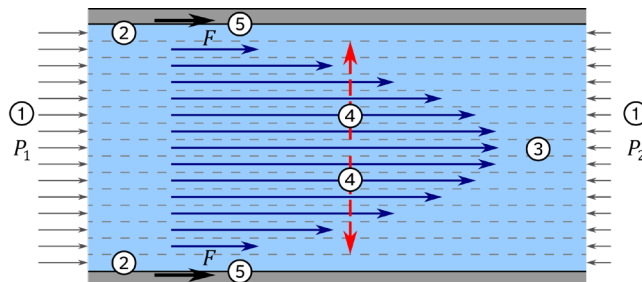


**Figura 3.6** Transporte viscoso en el flujo de Couette.

1. Se aplica una fuerza a la placa superior que la mantiene moviéndose con una velocidad determinada. Esta fuerza es la que genera el momentum en el sistema.
2. La velocidad de la primera capa de fluido es la misma que la velocidad de la placa, debido a la condición de no deslizamiento.
3. El momentum de esa capa se transfiere a la siguiente capa por transporte viscoso. Este proceso continúa de capa en capa hacia abajo, debido al gradiente de velocidad.
4. La velocidad de la última capa de fluido es cero, por la condición de no deslizamiento.
5. En la última capa, el momentum desaparece convirtiéndose en una fuerza que el fluido ejerce sobre la placa.

### 3.1.2.2 Transporte viscoso en el flujo de Poiseuille

En el **flujo de Poiseuille** (Figura 3.7), el fluido también se encuentra entre dos placas planas paralelas, pero ambas permanecen fijas. La presión del fluido en un extremo es  $P_1$  y en el otro es  $P_2$ , siendo en este ejemplo  $P_1 > P_2$ .



**Figura 3.7** Transporte viscoso en el flujo de Poiseuille.

1. La presión en cada extremo ejerce una fuerza sobre todas y cada una de las capas del fluido. Como la presión es mayor en uno de los extremos (en este ejemplo, el extremo izquierdo) esas fuerzas de presión no son iguales

y existe una fuerza resultante que actúa sobre el fluido. Esta fuerza resultante es lo que genera el momentum en el sistema.

2. Debido a la condición de no deslizamiento, la velocidad del fluido en contacto con ambas placas es cero.
3. Como resultado, existe un perfil de velocidades en el que, por simetría, la velocidad es máxima en el centro.
4. Debido a que existe un gradiente de velocidad, se presenta un transporte viscoso de momentum que va desde el centro hacia las placas (es decir, de las capas de mayor velocidad a las capas de menor velocidad).
5. El momentum desaparece cuando llega a las placas, convirtiéndose en una fuerza que el fluido ejerce sobre cada placa.

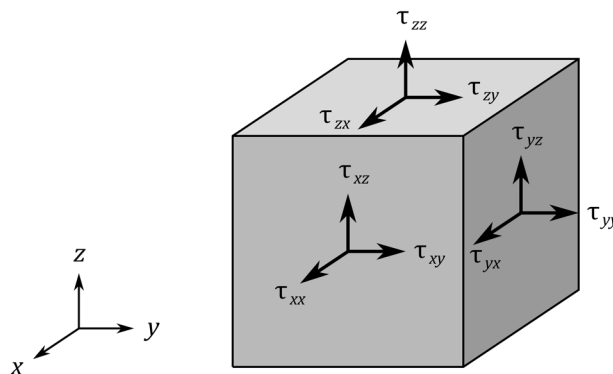
### 3.1.3 Ley de Newton de la viscosidad

La ley de Newton de la viscosidad es una **relación empírica** entre el *esfuerzo cortante* y el *gradiente de velocidad* en un fluido en movimiento. Los fluidos que se comportan de acuerdo a esta relación se denominan “*fluidos newtonianos*”. La mayoría de las sustancias simples (incluyendo al aire y al agua) son fluidos newtonianos.

Para deducir la ley de Newton de la viscosidad, es necesario definir primero los dos conceptos clave de *esfuerzo* y *gradiente de velocidad*.

Como se mencionó en la Unidad 1, el **esfuerzo** está definido como la fuerza por unidad de área,  $\tau = F / A$ . Se habla de *esfuerzo normal* cuando la fuerza es perpendicular a la superficie, y de *esfuerzo tangencial (cortante)* cuando la fuerza es paralela a la superficie.

La fuerza es un vector que se puede separar en tres componentes. El área, aún cuando generalmente se trata como un escalar, tiene una orientación en el espacio que se puede identificar con un vector perpendicular (normal) a la superficie. De esta manera, las posibles combinaciones de tres componentes de la fuerza y tres orientaciones del área respecto a los ejes coordinados, dan lugar a nueve componentes para el esfuerzo (Figura 3.8).



**Figura 3.8** Componentes del tensor esfuerzo en coordenadas rectangulares.

Una cantidad matemática que tiene nueve componentes se denomina **tensor**<sup>\*</sup>. El tensor esfuerzo también se puede representar como una matriz de  $3 \times 3$ :

<sup>\*</sup> En un sentido más estricto, en tres dimensiones, un *tensor de segundo orden* es una cantidad física con nueve componentes. Un *tensor de primer orden* es una cantidad con tres componentes (vector) y un *tensor de orden cero* es una cantidad con un solo componente (escalar). El concepto de tensor también se puede extender a órdenes superiores: un tensor de cuarto orden tiene 27 componentes.

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

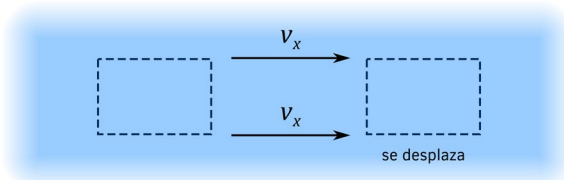
Nótese que cada componente del tensor esfuerzo  $\tau$  tiene dos subíndices: el primer subíndice indica la dirección del vector normal al área, mientras que el segundo subíndice indica la dirección del componente de la fuerza. Por ejemplo,  $\tau_{yx}$  es la fuerza en la dirección  $x$  que se aplica sobre una superficie cuya normal es en la dirección  $y$ .

El tensor esfuerzo en un fluido es *simétrico*,\* por lo que las siguientes componentes son iguales entre sí:

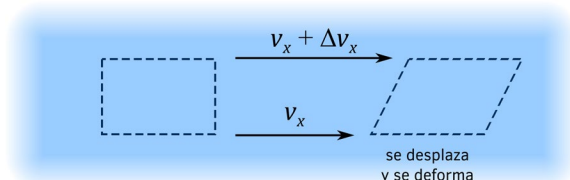
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (3.5)$$

Así, en un fluido sólo puede haber tres esfuerzos normales y tres esfuerzos tangenciales (esfuerzos cortantes).

Por otro lado, el **gradiente de velocidad** es una cantidad física que indica cuánto cambia la velocidad de un punto a otro en un fluido en movimiento. Considérese una cierta porción de un fluido, como se aprecia en la Figura 3.9. Cuando la velocidad es uniforme, esa porción de fluido simplemente *se desplaza* una cierta distancia. Pero cuando la velocidad no es uniforme, como en la Figura 3.10, esa porción de fluido *se desplaza y se deforma*.

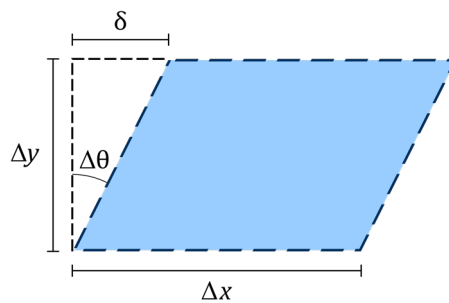


**Figura 3.9** Flujo con velocidad uniforme.



**Figura 3.10** Flujo con velocidad no uniforme.

La Figura 3.11 muestra la misma porción de fluido de la Figura 3.10, una vez deformado, estableciendo la notación que se utilizará para deducir el gradiente de velocidad.



**Figura 3.11** Dedución del gradiente de velocidad.

Durante un cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el elemento de fluido se ha deformado un ángulo  $\Delta\theta$  respecto a su forma original. A partir del triángulo rectángulo formado del lado izquierdo de la Figura 3.11, la tangente del ángulo  $\Delta\theta$  es:

\* La simetría del tensor de esfuerzo se puede demostrar mediante un análisis de conservación de momento angular.

$$\tan \Delta\theta = \frac{\delta}{\Delta y} \quad (3.6)$$

A su vez, la distancia  $\delta$  es la diferencia de las distancias recorridas por la parte superior e inferior del fluido:

$$\delta = \left[ \begin{array}{c} \text{distancia recorrida por la} \\ \text{parte superior del fluido} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{distancia recorrida por la} \\ \text{parte inferior del fluido} \end{array} \right] \quad (3.7)$$

$$\delta = \left[ (v_x + \Delta v_x) \Delta t \right] - \left[ v_x \Delta t \right] \quad (3.8)$$

$$\delta = \Delta v_x \Delta t \quad (3.9)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.6 y reacomodando:

$$\tan \Delta\theta = \frac{\Delta v_x \Delta t}{\Delta y} \quad (3.10)$$

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{\tan \Delta\theta}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Considerando que el intervalo de tiempo analizado es pequeño, el ángulo de deformación también será pequeño, lo que permite hacer la aproximación  $\tan \Delta\theta \approx \Delta\theta$ , y la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (3.12)$$

Tomando el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , los cocientes de diferencias se convierten en derivadas:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.13)$$

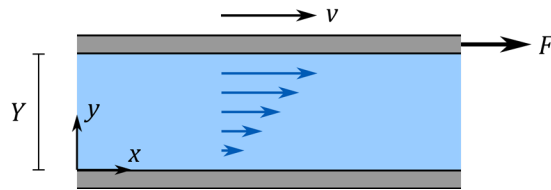
La derivada del lado izquierdo ( $dv_x / dy$ ) representa qué tanto cambia la velocidad del fluido de un punto a otro, por lo que se le llama *gradiente de velocidad*. La derivada del lado derecho ( $d\theta / dt$ ) representa qué tan rápido cambia la forma del fluido al transcurrir el tiempo, por lo que se denomina *rapidez de deformación*. Estos dos conceptos son prácticamente equivalentes, por lo que en mecánica de fluidos se usan ambos indistintamente. Sin embargo, el gradiente de velocidad es más conveniente desde un punto de vista práctico, ya que es relativamente fácil medir la velocidad del fluido, mientras que la deformación es mucho menos empleada, ya que involucra ángulos que difícilmente se podrían medir.

La velocidad del fluido es un vector, por lo que tiene tres componentes, y cada uno de ellos puede variar en cualquiera de las tres direcciones. Esto significa que el gradiente de velocidad tiene nueve componentes, por lo que es un **tensor**, al igual que el esfuerzo. El gradiente de velocidad se representa como  $\nabla \mathbf{v}$ , y sus componentes son:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Ahora que se tienen definidas estas dos cantidades físicas (esfuerzo y gradiente de velocidad), se puede proceder a deducir la ley de Newton de la viscosidad. Se planteará primero una observación empírica que permitirá establecer la relación entre algunas variables, para luego llevar esa conclusión a nivel microscópico y obtener la forma matemática de esta ley.

Considérese el sistema que se muestra en la Figura 3.12, donde se tienen dos placas paralelas de área  $A$  que están separadas una distancia  $Y$  (exagerada en la figura por claridad). El espacio entre las placas está lleno de un fluido. La placa inferior se mantiene fija, mientras que a la placa superior le aplica una fuerza para ponerla en movimiento.



**Figura 3.12** Observación empírica de la ley de Newton.

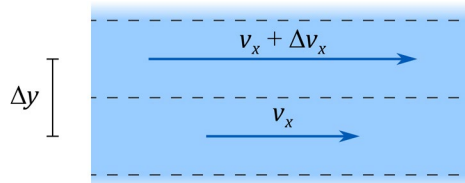
Experimentalmente se verifica que la fuerza  $F$  requerida para mantener en movimiento la placa superior con velocidad constante es directamente proporcional al área de la placa  $A$ , directamente proporcional a la velocidad  $v$  e inversamente proporcional a la distancia de separación  $Y$  entre las placas. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$F \propto \frac{Av}{Y} \quad (3.15)$$

Recordando que el esfuerzo es la fuerza por unidad de área ( $\tau = F / A$ ), esta ecuación se puede reacomodar como:

$$\tau \propto \frac{v}{Y} \quad (3.16)$$

Esta observación empírica se traslada ahora a un nivel microscópico. La Figura 3.13 muestra dos capas del fluido del sistema anterior, que se mueven con diferente velocidad. La distancia entre las capas (centro a centro) es  $\Delta y$ .



**Figura 3.13** Deducción a nivel microscópico de la ley de Newton de la viscosidad.

El esfuerzo cortante en el fluido (es decir, la fuerza que una capa ejerce sobre la otra, dividida entre el área de contacto de las capas) es directamente proporcional a la diferencia de velocidad  $\Delta v_x$  e inversamente proporcional a la distancia entre las capas  $\Delta y$ :

$$\tau_{yx} \propto \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \quad (3.17)$$

Tomando el caso límite cuando la separación entre las capas es muy pequeña ( $\lim \Delta y \rightarrow 0$ ), el cociente de las dos diferencias se convierte en la derivada de la velocidad con respecto a la distancia:

$$\tau_{yx} \propto \frac{dv_x}{dy} \quad (3.18)$$

Para quitar el símbolo de proporcionalidad, se introduce una constante  $\mu$ , llamada **viscosidad**.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy} \quad (3.19)$$

Se recordará que el tensor esfuerzo  $\tau$  es un tensor simétrico, pero el tensor gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{v}$  en general no lo es. Por esta razón, para la ley de Newton de la viscosidad se define un tensor  $\dot{\gamma}$ , llamado **rapidez de deformación**, sumando el gradiente de velocidad con su transpuesta, para obtener un tensor simétrico que se pueda relacionar directamente con el tensor esfuerzo:

$$\dot{\gamma} \equiv (\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T \quad (3.20)$$

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Esta definición de la rapidez de deformación  $\dot{\gamma}$  permite expresar la ley de Newton de la viscosidad en su forma más compacta en notación tensorial:

$$\tau = -\mu \dot{\gamma} \quad (3.22)$$

Finalmente, se puede dar la definición formal de la ley de Newton:

- ★ **Ley de Newton de la viscosidad:** El esfuerzo en un fluido en movimiento es directamente proporcional a la rapidez de deformación, donde la constante de proporcionalidad es una propiedad del fluido llamada *viscosidad*.

Es importante recordar que la ley de Newton de la viscosidad es una ley *empírica*, está basada en observaciones experimentales, pero no se puede deducir directamente a partir de leyes fundamentales de la naturaleza. Los fluidos que muestran esta relación entre el esfuerzo y el gradiente de velocidad se denominan **fluidos newtonianos**. Por otro lado, los fluidos que no se comportan de esta forma se llaman **fluidos no newtonianos**, que se abordarán con mayor detalle en la sección 3.5.

En coordenadas rectangulares<sup>†</sup>, la ecuación 3.22 equivale a las siguientes seis ecuaciones para los esfuerzos:

<sup>\*</sup> Muchos libros de mecánica de fluidos presentan una ecuación equivalente para la ley de Newton de la viscosidad, pero *sin el signo negativo*. La diferencia se debe a la tercera ley de Newton: si la capa A ejerce una fuerza sobre la capa B en un fluido, entonces la capa B ejerce sobre la capa A una fuerza igual, pero de signo opuesto. Dependiendo de cuál de estas fuerzas se use para definir el esfuerzo cortante, la ley de Newton de la viscosidad puede escribirse con signo negativo o no. En este documento sí se utiliza el signo negativo para enfatizar la similitud con la ley de Fourier de la conducción y la ley de Fick de la difusión, que siempre llevan signo negativo.

<sup>†</sup> En el anexo se incluye la ley de Newton de la viscosidad en los tres sistemas de coordenadas (rectangulares, cilíndricas y esféricas).

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (3.23)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (3.24)$$

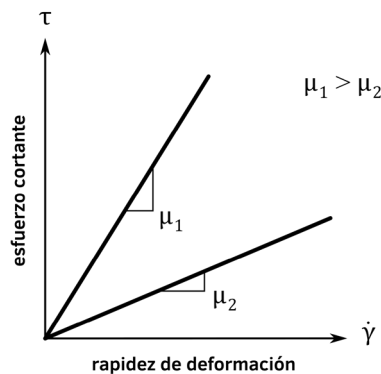
$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.25)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (3.26)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (3.27)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (3.28)$$

El comportamiento de un fluido se puede presentar en un diagrama esfuerzo-deformación, donde la rapidez de deformación  $\dot{\gamma}$  se usa en el eje horizontal, y el esfuerzo  $\tau$  en el eje vertical\*. En esta gráfica, un fluido newtoniano se representa como una recta que pasa por el origen, cuya pendiente es la viscosidad  $\mu$ . La Figura 3.14 compara dos fluidos newtonianos de diferente viscosidad.



**Figura 3.14** Diagrama esfuerzo – deformación para fluidos newtonianos.

En términos generales, la viscosidad de un gas aumenta con la temperatura, mientras que la viscosidad de un líquido disminuye al aumentar la temperatura. De hecho, ambas viscosidades convergen al mismo valor en el punto crítico.

Respecto a la presión, la viscosidad de los gases es prácticamente independiente de la presión cuando la presión es baja (alrededor de 10 atmósferas o menos). Cuando la presión es mayor, la viscosidad del gas aumenta. Para los líquidos, la viscosidad no varía con la presión (debido a su incompresibilidad) excepto a presiones muy altas, que causan un ligero aumento de la viscosidad.

\* En este tipo de gráfica, se acostumbra omitir el signo negativo de la ley de Newton y presentar la gráfica en el primer cuadrante.

### 3.1.4 Algunos métodos de estimación para viscosidad

En un gran número de cálculos en ingeniería química, se requieren datos (viscosidad, conductividad térmica, difusividad, etcétera) de las sustancias involucradas. Existen tres alternativas para obtener este tipo de información:

- ★ **Datos reportados en la bibliografía:** En este caso, la propiedad de interés ha sido determinada previamente por alguien más. El dato puede estar reportado a las condiciones de interés o puede ser necesario interpolar. De uno u otro modo, la información está disponible y simplemente se cita la fuente. En esta categoría se tiene el *Manual del Ingeniero Químico* de Perry, las *International Critical Tables*, e innumerables libros y artículos en revistas técnico-científicas.
- ★ **Métodos de estimación:** Si no se encuentra el dato ya reportado, frecuentemente es posible aplicar algún método para calcularlo con base en otros datos de la misma sustancia, tales como propiedades del punto crítico, estructura de la molécula, etcétera. Estos métodos generalmente emplean correlaciones empíricas deducidas a partir de datos experimentales para múltiples sustancias químicas (por lo general compuestos orgánicos). Sin embargo, es importante recordar que el valor obtenido es una estimación: no se puede estar completamente seguro de que sea correcto a menos que se comparara con el valor experimental. Un método de estimación puede dar resultados muy exactos para una sustancia, pero muy desviados para otra. Además, dos métodos pueden dar estimaciones diferentes para la misma propiedad.
- ★ **Medición experimental:** En ocasiones, la propiedad buscada no se puede encontrar reportada, y no es posible estimarla de manera confiable por ningún método: la única alternativa es determinarla en el laboratorio.

En esta sección, se presentarán algunos métodos de estimación para viscosidad. Existe un gran número de modelos que permiten estimar viscosidades de compuestos puros y mezclas, en fase gaseosa o líquida. Los métodos que se incluyen aquí se han seleccionado tomando en cuenta su exactitud, su rango de validez, y su nivel de complejidad, bajo la perspectiva de su aplicación práctica. Se recomienda consultar otras fuentes especializadas en el tema, en particular Poling (2000).

La mayoría de las ecuaciones empleadas en estos métodos son correlaciones *dimensionales*, por lo que debe emplearse las unidades correctas en la sustitución (si no se indican en el método, emplear las unidades indicadas en la tabla de Notación que aparece al principio del documento).

#### 3.1.4.1 Teoría cinética de Chapman-Enskog (viscosidad de gases puros a baja presión)

La “teoría cinética de los gases” fue desarrollada de forma independiente por Sydney Chapman y David Enskog entre 1910 y 1920. A partir de esta teoría, es posible obtener predicciones para la viscosidad, la conductividad térmica y la difusividad en un gas.

En termodinámica se estudió el gas ideal, adecuado para describir un gas a temperaturas suficientemente altas o presiones suficientemente bajas. Una de las suposiciones de este modelo es que el gas está formado por partículas que no ejercen ninguna fuerza entre sí.

Sin embargo, las moléculas en un gas real experimentan fuerzas que son de atracción o de repulsión, según la distancia entre ellas. Se han desarrollado diversos modelos para describir esta interacción, siendo uno de los más populares el potencial de Lennard-Jones  $\phi(r)$ , que se muestra en la Figura 3.15.

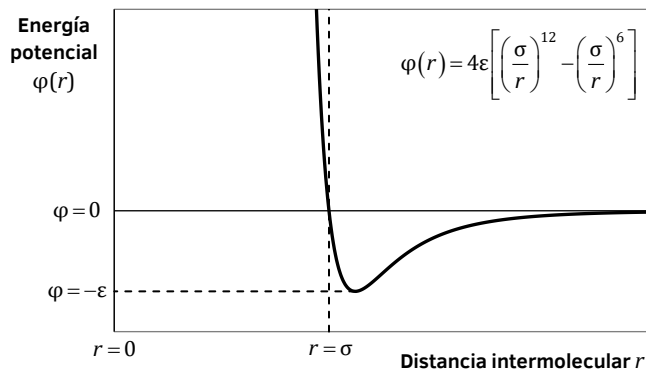


Figura 3.15 Potencial de Lennard-Jones.

Este potencial tiene dos parámetros, una *energía característica*  $\varepsilon$  (frecuentemente reportada como  $\varepsilon / \kappa$ , es decir, dividida entre la constante de Boltzmann  $\kappa$ ), que representa la mínima energía de interacción cuando la fuerza entre las moléculas pasa de atracción a repulsión, y el *diámetro de colisión*  $\sigma$ , que representa la distancia entre las moléculas en la cual el potencial es cero. Estos dos parámetros deben ser estimados a partir de datos experimentales del gas (generalmente datos de viscosidad en función de la temperatura). Los parámetros de Lennard-Jones para varios compuestos, junto con sus propiedades críticas, se muestran en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades para estimación de viscosidad.

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\varepsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$\tilde{V}_c$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)
H <sub>2</sub>	2.016	2.827	59.7	33.2	13.0	65.1
He	4.003	2.551	10.22	5.19	2.27	57.4
Ne	20.183	2.820	32.8	44.4	27.6	41.6
Ar	39.948	3.542	93.3	150.8	48.7	74.9
Kr	83.800	3.655	178.9	209.4	55.0	91.2
Xe	131.300	4.047	231.0	289.7	58.4	118.4
aire	28.964	3.711	78.6	132.4	37.0	86.7
N <sub>2</sub>	28.013	3.798	71.4	126.2	33.9	89.8
O <sub>2</sub>	31.999	3.467	106.7	154.6	50.4	73.4
H <sub>2</sub> O	18.015	2.649	356	647.3	221.2	57.1
CO	28.010	3.690	91.7	132.9	35.0	93.2
CO <sub>2</sub>	44.010	3.941	195.2	304.1	73.8	93.9
COS	60.070	4.130	336.0	378.8	63.5	136.3
CS <sub>2</sub>	76.131	4.483	467.0	552	79.0	160
C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	52.035	4.361	348.6	400	59.8	-
NH <sub>3</sub>	17.031	2.900	558.3	405.5	113.5	72.5
NO	30.006	3.492	116.7	180	64.8	57.7
N <sub>2</sub> O	44.013	3.828	232.4	309.6	72.4	97.4
SO <sub>2</sub>	64.063	4.112	335.4	430.8	78.8	122.2
F <sub>2</sub>	37.997	3.357	112.6	144.3	52.2	66.3
Cl <sub>2</sub>	70.906	4.217	316.0	416.9	79.8	123.8

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\varepsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$\bar{V}_c$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)
Br <sub>2</sub>	159.808	4.296	507.9	588	103	127.2
I <sub>2</sub>	253.82	5.160	474.2	819	117	155.0
HF	20.006	3.148	330.0	461	64.8	69.2
HCl	36.461	3.339	344.7	324.7	83.1	80.9
HBr	80.912	3.353	449.0	363.2	85.5	-
HI	127.912	4.211	288.7	424.0	83.1	132.7
HCN	27.026	3.630	569.1	456.7	53.9	138.8
H <sub>2</sub> S	34.080	3.623	301.1	373.2	89.4	98.6
SF <sub>6</sub>	146.054	5.128	222.1	318.7	37.6	198.8
UF <sub>6</sub>	352.018	5.967	236.8	505.8	46.6	250.0
Hg	200.61	2.969	750.0	1765	1510	42.7
CH <sub>4</sub>	16.043	3.758	148.6	190.4	46.0	99.2
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30.070	4.443	215.7	305.4	48.8	148.3
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28.054	4.163	224.7	282.4	50.4	130.4
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26.038	4.033	231.8	308.3	61.4	112.7
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44.094	5.118	237.1	369.8	42.5	203
CH <sub>2</sub> =CH-CH <sub>3</sub>	42.081	4.678	298.9	364.9	46.0	181
CH≡C-CH <sub>3</sub>	40.065	4.761	251.8	402.4	56.3	164
n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	4.687	531.4	425.2	38.0	255
iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	5.278	330.1	408.2	36.5	263
n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	72.151	5.784	341.1	469.7	33.7	304
C(CH <sub>3</sub> ) <sub>4</sub>	72.151	6.464	193.4	433.8	32.0	303
n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	86.178	5.949	399.3	507.5	30.1	370
ciclopropano	42.081	4.807	248.9	397.8	54.9	163
ciclohexano	84.162	6.182	297.1	553.5	40.7	308
benceno	78.114	5.349	412.3	562.2	48.9	259
CH <sub>3</sub> -OH	32.042	3.626	481.8	512.6	80.9	118.0
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	46.069	4.530	362.6	513.9	61.4	167.1
CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	58.080	4.600	560.2	508.1	47.0	209
CH <sub>3</sub> -O-CH <sub>3</sub>	46.069	4.307	395.0	400.0	52.4	178
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -O-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	74.123	5.678	313.8	466.7	36.4	280
CH <sub>3</sub> Cl	50.488	4.182	350.0	416.3	67.0	138.9
CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	84.933	4.898	356.3	510	63.0	193
CHCl <sub>3</sub>	119.378	5.389	340.2	536.4	53.7	238.9
CCl <sub>4</sub>	153.823	5.947	322.7	556.4	45.6	275.9
CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120.914	5.116	280.0	385.0	41.4	216.7
SiH <sub>4</sub>	32.122	4.084	207.6	269.7	48.4	-
SiF <sub>4</sub>	104.09	4.880	171.9	259.0	37.2	-

A partir de la teoría cinética se puede deducir\* la siguiente ecuación para la viscosidad de un gas a baja presión:

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \quad (3.29)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad en Pa·s,  $M$  es el peso molecular en g/mol,  $T$  es la temperatura absoluta en kelvin,  $\sigma$  es el diámetro de colisión en ångströms (Å), y  $\Omega_\mu$  se denomina *integral de colisión* (adimensional). Esta integral de colisión se puede consultar (Tabla 3.2) en función de la temperatura adimensional  $T^*$ , definida como:

$$T^* = \frac{\kappa T}{\varepsilon} \quad \text{o bien} \quad T^* = \frac{T}{\varepsilon / \kappa} \quad (3.30)$$

**Tabla 3.2** Integral de colisión para viscosidad (Lennard-Jones).

$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$
0.30	2.8458	1.00	1.5925	1.70	1.2486	2.8	1.0591	4.2	0.9587	12	0.8026
0.35	2.6791	1.05	1.5533	1.75	1.2347	2.9	1.0489	4.3	0.9539	14	0.7844
0.40	2.5316	1.10	1.5173	1.80	1.2216	3.0	1.0394	4.4	0.9493	16	0.7690
0.45	2.4003	1.15	1.4843	1.85	1.2092	3.1	1.0304	4.5	0.9447	18	0.7556
0.50	2.2831	1.20	1.4539	1.90	1.1975	3.2	1.0220	4.6	0.9406	20	0.7439
0.55	2.1781	1.25	1.4259	1.95	1.1865	3.3	1.0141	4.7	0.9365	25	0.7196
0.60	2.0839	1.30	1.4000	2.0	1.1760	3.4	1.0066	4.8	0.9326	30	0.7003
0.65	1.9991	1.35	1.3760	2.1	1.1565	3.5	0.9995	4.9	0.9288	35	0.6844
0.70	1.9226	1.40	1.3538	2.2	1.1388	3.6	0.9927	5.0	0.9252	40	0.6710
0.75	1.8535	1.45	1.3331	2.3	1.1227	3.7	0.9864	6.0	0.8947	45	0.6593
0.80	1.7909	1.50	1.3139	2.4	1.1079	3.8	0.9803	7.0	0.8719	50	0.6491
0.85	1.7341	1.55	1.2959	2.5	1.0943	3.9	0.9745	8.0	0.8535	60	0.6317
0.90	1.6825	1.60	1.2791	2.6	1.0817	4.0	0.9690	9.0	0.8382	80	0.6053
0.95	1.6354	1.65	1.2633	2.7	1.0700	4.1	0.9637	10	0.8249	100	0.5855

Valores calculados con las correlaciones de Neufeld citadas en Poling (2000).

Para sustancias no incluidas en la Tabla 3.1,  $\sigma$  y  $\varepsilon / \kappa$ , se pueden estimar con base en el punto crítico, el punto de ebullición normal o el punto de fusión normal (Tabla 3.3).

**Tabla 3.3** Estimación de los parámetros de Lennard-Jones.

punto crítico (preferible)	punto crítico (alternativa)	punto de ebullición	punto de fusión
$\sigma = 0.841 \tilde{V}_c^{1/3}$	$\sigma = 2.44 (T_c / P_c)^{1/3}$	$\sigma = 1.166 \tilde{V}_b^{1/3}$	$\sigma = 1.222 \tilde{V}_m^{1/3}$
$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 0.77 T_c$	$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 0.77 T_c$	$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 1.15 T_b$	$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 1.92 T_m$

( $T_c$ ,  $T_b$  y  $T_m$  en K,  $P_c$  en bar,  $\tilde{V}_c$ ,  $\tilde{V}_b$  y  $\tilde{V}_m$  en cm<sup>3</sup>/mol)

\* La deducción se puede consultar en Bird (2002).

**EJEMPLO 3.1****81939.03**

Estimar la viscosidad del vapor de cloroformo a 200 °C y 1 atm, aplicando la teoría cinética de Chapman-Enskog.

**SOLUCIÓN**

Para el cloroformo, se obtienen los siguientes datos de la tabla:

$$M = 119.378 \text{ g/mol}, \sigma = 5.389 \text{ \AA}, \varepsilon / \kappa = 340.2 \text{ K.}$$

Primero, se calcula la temperatura adimensional  $T^*$ :

$$T^* = \frac{T}{\varepsilon / \kappa}$$

$$T^* = \frac{473.15 \text{ K}}{340.2 \text{ K}}$$

$$T^* = 1.391$$

Con este valor se obtiene la integral de colisión  $\Omega_\mu$ , mediante interpolación en la tabla correspondiente:

$$\Omega_\mu = 1.3577$$

Finalmente, se sustituye en la fórmula para calcular la viscosidad.

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_\mu}$$

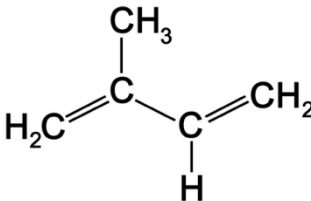
$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{[(119.378)(473.15)]^{0.5}}{(5.389)^2 (1.3577)}$$

$$\mu = 1.609 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

■

**EJEMPLO 3.2**

El isopreno (nombre IUPAC: 2-metil-1,3-butadieno) es un compuesto orgánico sintetizado por muchas plantas que forma la unidad estructural de muchos compuestos de importancia biológica. Fue obtenido inicialmente a partir de la degradación térmica del hule natural. Actualmente se produce alrededor de 800 mil toneladas al año como subproducto de la descomposición térmica del petróleo y como subproducto de la producción de etileno. Un 95% del isopreno producido se convierte en cis-1,4-poli-isopreno (una versión sintética del hule natural).

<b>ISOPRENO</b>		
	Fórmula molecular	C <sub>5</sub> H <sub>8</sub>
	Número CAS	78-79-5
	Punto de fusión	-120 °C
	Punto de ebullición	34 °C
	Temperatura crítica	211 °C
	Presión crítica	38.5 bar
	Volumen molar crítico	277 cm <sup>3</sup> /mol
	Factor acéntrico	0.158
	Densidad de líquido a 20°C	0.681 g/cm <sup>3</sup>

Aplicando la teoría cinética de Chapman y Enskog, estimar la viscosidad del vapor de isopreno a 47 °C y 1 atm.

**SOLUCIÓN**

Lo primero que se requiere es una estimación de los parámetros  $\sigma$  y  $\varepsilon / \kappa$ . Para ello se emplearán los datos del punto crítico.

$$\sigma = 0.841 \tilde{V}_c^{1/3}$$

$$\sigma = 0.841 (277 \text{ cm}^3/\text{mol})^{1/3}$$

$$\sigma = 5.482 \text{ \AA}$$

$$\varepsilon / \kappa = 0.77 T_c$$

$$\varepsilon / \kappa = 0.77 T (484.15 \text{ K})$$

$$\varepsilon / \kappa = 372.80 \text{ K}$$

A continuación, se calcula la temperatura adimensional  $T^*$ :

$$T^* = \frac{T}{\varepsilon / \kappa}$$

$$T^* = \frac{320.15 \text{ K}}{372.80 \text{ K}}$$

$$T^* = 0.859$$

Con este valor se obtiene la integral de colisión  $\Omega_\mu$ , mediante interpolación en la tabla correspondiente:

$$\Omega_{\mu} = 1.7247$$

Finalmente, se sustituye en la fórmula para calcular la viscosidad (el peso molecular del isopreno, calculado a partir de la fórmula molecular, es 68.119 g/mol).

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{[(68.119)(320.15)]^{0.5}}{(5.482)^2 (1.7247)}$$

$$\mu = 7.605 \times 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

NOTA: Si se emplea la fórmula alternativa para el diámetro de colisión,  $\sigma = 2.44(T_c / P_c)^{1/3}$ , el resultado es  $7.099 \times 10^{-6}$  Pa·s. ■

### 3.1.4.2 Ajuste de la viscosidad de gases a baja presión en función de la temperatura

Cuando se conoce un dato de viscosidad a una temperatura dada (por ejemplo, publicado en una tabla), puede ser más conveniente “ajustarlo” a la nueva temperatura en vez de estimarlo por alguno de los métodos de la sección previa, ya que el valor conocido constituye una referencia confiable. En la medida que la temperatura buscada y la temperatura de la referencia sean cercanas entre sí, el error de la estimación será menor.

Tomando en cuenta la teoría cinética de Chapman-Enskog para gases a baja presión, se puede aplicar la siguiente relación:

$$\mu_{@T_2} = \mu_{@T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{0.5} \quad (3.31)$$

Esta extrapolación permite estimar la viscosidad a una temperatura  $T_2$  a partir del valor conocido a otra temperatura  $T_1$ .

#### EJEMPLO 3.3

Estimar la viscosidad del vapor de sodio saturado a 900 K, sabiendo que a 800 K es  $1.96 \times 10^{-5}$  Pa·s (Perry, 2004). Comparar su resultado con el valor reportado en la misma referencia,  $2.06 \times 10^{-5}$  Pa·s.

#### SOLUCIÓN

La ecuación para extrapolar es:

$$\mu_{@T_2} = \mu_{@T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{0.5}$$

Sustituyendo:

$$\mu_{@T_2} = 1.96 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s} \left( \frac{900 \text{ K}}{800 \text{ K}} \right)^{0.5}$$

$$\mu_{@T_2} = 2.08 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

La misma referencia (Perry, 2004) da el valor de  $2.06 \times 10^{-5}$  Pa·s, por lo que el error porcentual de la extrapolación es:

$$\frac{2.08 \times 10^{-5} - 2.06 \times 10^{-5}}{2.06 \times 10^{-5}} \times 100\% = 0.97\%$$

Evidentemente, entre mayor sea el rango de extrapolación, mayor será el error. ■

### 3.1.4.3 Método de Stiel y Thodos (viscosidad de gases puros a baja presión)

Este método fue originalmente desarrollado para hidrocarburos puros, pero se puede emplear para otros gases no hidrocarburos excepto el hidrógeno.

$$\mu = 9.91 \times 10^{-8} \frac{NM^{1/2}P_c^{2/3}}{T_c^{1/6}} \quad (3.32)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad en Pa·s,  $M$  es el peso molecular en g/mol,  $P_c$  es la presión crítica en bar,  $T_c$  es la temperatura crítica en K, y  $N$  es una función de la temperatura reducida:

$$N = \begin{cases} 3.4T_r^{0.94} & \text{para } T_r \leq 1.5 \\ 1.778(4.58T_r - 1.67)^{0.625} & \text{para } T_r > 1.5 \end{cases} \quad (3.33)$$

**EJEMPLO 3.4****81939.03**

Estimar la viscosidad del vapor de cloroformo a 200 °C y 1 atm, aplicando el método de Stiel y Thodos.

**SOLUCIÓN**

Para el cloroformo, se obtienen los siguientes datos de la tabla:  
 $M = 119.378$  g/mol,  $T_c = 536.4$  K,  $P_c = 53.7$  bar.

Primero, se calcula la temperatura reducida  $T_r$  :

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

$$T_r = \frac{473.15 \text{ K}}{536.4 \text{ K}}$$

$$T_r = 0.882$$

Como la temperatura reducida es menor que 1.5, se calcula  $N$  con la siguiente fórmula:

$$N = 3.4T_r^{0.94}$$

$$N = 3.4(0.882)^{0.94}$$

$$N = 3.022$$

Finalmente, se calcula la viscosidad:

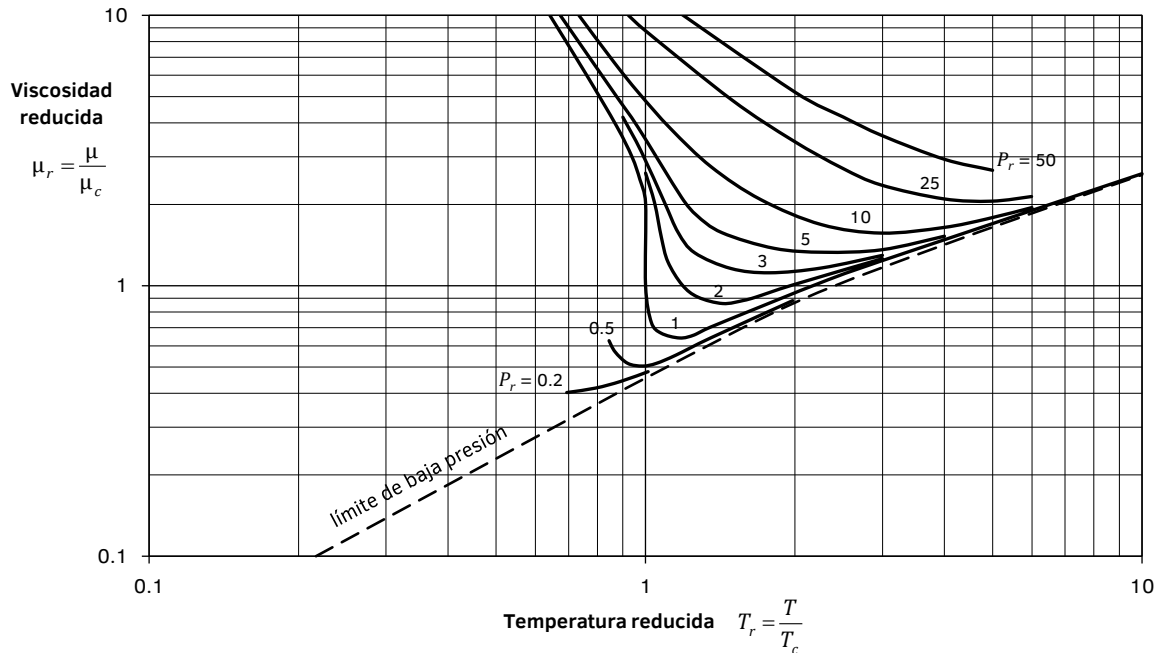
$$\mu = 9.91 \times 10^{-8} \frac{NM^{1/2}P_c^{2/3}}{T_c^{1/6}}$$

$$\mu = 9.91 \times 10^{-8} \frac{(3.022)(119.378)^{1/2} (53.7)^{2/3}}{(536.4)^{1/6}}$$

$$\mu = 1.634 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

### 3.1.4.4 Diagrama de viscosidad reducida (viscosidad de gases puros a alta presión)

No existe un valor específico a partir del cual la presión se considere "alta". Normalmente los métodos para gases a baja presión comienzan a mostrar desviaciones significativas cuando la presión es mayor a unas 10 atm. Con base en el principio de estados correspondientes, es posible relacionar la viscosidad reducida  $\mu_r = \mu / \mu_c$  con la temperatura y presión reducidas, como se muestra en la Figura 3.16.



**Figura 3.16** Diagrama de viscosidad reducida.

Adaptado de Bird (2002), Poling (2000) y White (1991)

Pocas veces se cuenta con datos de la viscosidad en el punto crítico; algunos valores se presentan en la Tabla 3.4.

**Tabla 3.4** Viscosidad en el punto crítico (en micropoise).

compuesto	$\mu_c$	compuesto	$\mu_c$	compuesto	$\mu_c$	compuesto	$\mu_c$
H <sub>2</sub>	34.7	H <sub>2</sub> O	450	CH <sub>4</sub>	159	n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	248
He	25.4	CO	190	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	210	ciclohexano	284
Ne	156	CO <sub>2</sub>	343	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	215	benceno	312
Ar	264	CS <sub>2</sub>	404	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	237	CH <sub>3</sub> -OH	284
Kr	396	NH <sub>3</sub>	250	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	228	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	285
Xe	490	NO	258	CH <sub>2</sub> =CH-CH <sub>3</sub>	233	CH <sub>3</sub> Cl	338
Aire	193	N <sub>2</sub> O	332	n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	239	CHCl <sub>3</sub>	410
N <sub>2</sub>	180	SO <sub>2</sub>	411	iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	239	CCl <sub>4</sub>	413
O <sub>2</sub>	250	Cl <sub>2</sub>	420	n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	238		

Valores recopilados de Bird (2002), Perry (2004), Incropera (2006), y Kim (2002).

Para otros compuestos, la viscosidad crítica se puede estimar con alguna de las siguientes correlaciones:

$$\mu_c = 6.16 \times 10^{-6} \frac{(MT_c)^{1/2}}{\tilde{V}_c^{2/3}} \quad (3.34)$$

$$\mu_c = 7.7 \times 10^{-7} \frac{M^{1/2} P_c^{2/3}}{T_c^{1/6}} \quad (3.35)$$

donde  $\mu_c$  es la viscosidad crítica en Pa·s,  $M$  es el peso molecular en g/mol,  $P_c$  es la presión crítica en bar,  $T_c$  es la temperatura crítica en K y  $\tilde{V}_c$  es el volumen molar crítico en cm<sup>3</sup>/mol.

Una última opción, cuando no se tiene el valor de la viscosidad crítica pero sí se conoce un dato de viscosidad a otra temperatura y presión, entonces se puede estimar con  $\mu_c = \mu / \mu_r$ , empleando  $\mu_r$  a la temperatura reducida y la presión reducida correspondientes.

**EJEMPLO 3.5**

Estimar la viscosidad del argón a 20 °C y 400 bar.

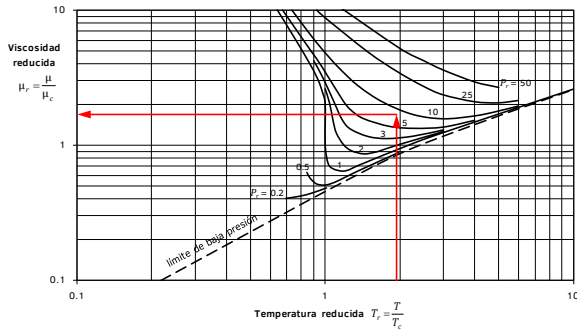
**SOLUCIÓN**

Se requiere encontrar el valor de la viscosidad reducida, a partir de la temperatura reducida y la presión reducida. Para el argón,  $T_c = 150.86$  K y  $P_c = 48.98$  bar.

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{293.15 \text{ K}}{150.86 \text{ K}} = 1.94$$

$$P_r = \frac{P}{P_c} = \frac{400 \text{ bar}}{48.98 \text{ bar}} = 8.17$$

Con estos datos, se obtienen la viscosidad reducida del diagrama:



de donde se obtiene  $\mu_r = 1.7$ . La viscosidad crítica del argón es 264  $\mu$ P, por lo que la viscosidad buscada es:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_c} \rightarrow \mu = \mu_r \mu_c$$

$$\mu = 1.7(264 \mu\text{P})$$

$$\mu = 449 \mu\text{P}$$

■

**3.1.4.5 Método de Wilke**  
(viscosidad de mezclas de gases a baja presión)

Este método emplea la fracción mol y la viscosidad de los componentes puros a la misma temperatura. Para una mezcla multicomponente la ecuación del método de Wilke es:

$$\mu_m = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n y_j \Phi_{ij}} \tag{3.36}$$

que para una mezcla binaria se reduce a:

$$\mu_m = \frac{y_1 \mu_1}{y_1 + y_2 \Phi_{12}} + \frac{y_2 \mu_2}{y_2 + y_1 \Phi_{21}} \tag{3.37}$$

$\Phi_{ij}$  es un parámetro de interacción adimensional dado por:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2 \quad (3.38)$$

y el correspondiente parámetro  $\Phi_{ji}$  se puede encontrar con la fórmula simplificada:

$$\Phi_{ji} = \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{M_i}{M_j} \Phi_{ij} \quad (3.39)$$

Obsérvese que cuando ambos subíndices son iguales,  $\Phi = 1$ .

### EJEMPLO 3.6

El gas de chimenea es la mezcla gaseosa que se libera como producto de la combustión en calderas, hornos, plantas de energía eléctrica, etcétera. Su composición depende del combustible que se use, pero generalmente consiste en su mayoría de nitrógeno (del aire de combustión), dióxido de carbono, vapor de agua, oxígeno (del aire en exceso), y pequeñas cantidades de algunos contaminantes como partículas sólidas, dióxido de azufre, óxidos de nitrógeno, monóxido de carbono y mercurio. Frecuentemente, este gas de chimenea recibe un tratamiento antes de ser liberado a la atmósfera, para reducir su impacto ambiental (por ejemplo, secuestro de CO<sub>2</sub> o eliminación del SO<sub>2</sub>). Para el diseño preliminar de un equipo de absorción, un ingeniero necesita estimar la viscosidad a 80 °C de un gas de chimenea compuesto por 76.5% N<sub>2</sub>, 12.6% CO<sub>2</sub>, 6.2% H<sub>2</sub>O, 4.7% O<sub>2</sub>, y trazas (despreciables) de CO, NO<sub>x</sub>, Hg y SO<sub>2</sub>.

### SOLUCIÓN

Los componentes traza se desprecian, y los componentes principales se designan por número: (1) N<sub>2</sub>, (2) CO<sub>2</sub>, (3) H<sub>2</sub>O, (4) O<sub>2</sub>. Así, las fracciones mol en la mezcla son:  $y_1 = 0.765$ ,  $y_2 = 0.126$ ,  $y_3 = 0.062$ ,  $y_4 = 0.047$ .

Primero es necesario estimar la viscosidad de los componentes puros, que se hará con el método de Chapman-Enskog:

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_\mu}$$

No se detallan los cálculos, sólo se presentan resumidos en la siguiente tabla:

Componente	M (g/mol)	$\sigma$ (Å)	$\varepsilon / \kappa$ (K)	$\Omega_\mu$ (-)	$\mu$ (μP)
(1) N <sub>2</sub>	28.014	3.798	71.4	0.9271	198.5
(2) CO <sub>2</sub>	44.010	3.941	195.2	1.2193	175.7
(3) H <sub>2</sub> O	18.015	2.649	356	1.5991	189.7
(4) O <sub>2</sub>	31.999	3.467	106.7	1.0133	233.0

El método de Wilke para viscosidad de mezclas de gases a baja presión es:

$$\mu_m = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n y_j \Phi_{ij}}$$

Desarrollando las sumatorias para cuatro componentes (recordar que  $\Phi = 1$  cuando  $i = j$ ):

$$\begin{aligned} \mu_m = & \frac{y_1 \mu_1}{y_1 + y_2 \Phi_{12} + y_3 \Phi_{13} + y_4 \Phi_{14}} \\ & + \frac{y_2 \mu_2}{y_1 \Phi_{21} + y_2 + y_3 \Phi_{23} + y_4 \Phi_{24}} \\ & + \frac{y_3 \mu_3}{y_1 \Phi_{31} + y_2 \Phi_{32} + y_3 + y_4 \Phi_{34}} \\ & + \frac{y_4 \mu_4}{y_1 \Phi_{41} + y_2 \Phi_{42} + y_3 \Phi_{43} + y_4} \end{aligned}$$

donde los parámetros de interacción  $\Phi_{ij}$  están dados por:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2$$

$$\Phi_{ji} = \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{M_i}{M_j} \Phi_{ij}$$

Como ejemplo se muestra el cálculo de  $\Phi_{12}$  y  $\Phi_{21}$ :

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \right]^2$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{28.014}{44.010} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{198.5}{175.7} \right)^{1/2} \left( \frac{44.010}{28.014} \right)^{1/4} \right]^2$$

$$\Phi_{12} = 1.32547$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{M_1}{M_2} \Phi_{12}$$

$$\Phi_{21} = \left( \frac{175.7}{198.5} \right) \left( \frac{28.014}{44.010} \right) (1.32547)$$

$$\Phi_{21} = 0.74680$$

Los parámetros se resumen en la siguiente tabla:

$\Phi_{ij}$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	1	1.32547	0.81201	0.98592
$i = 2$	0.74680	1	0.59681	0.74480
$i = 3$	1.20673	1.57415	1	1.17883
$i = 4$	1.01315	1.35843	0.81515	1

Se realiza entonces la sustitución:

$$\mu_m = \frac{(0.765)(198.5)}{0.765 + (0.126)(1.32547) + (0.062)(0.81201) + (0.047)(0.98592)}$$

$$+ \frac{(0.126)(175.7)}{(0.765)(0.74680) + 0.126 + (0.062)(0.59681) + (0.047)(0.74480)}$$

$$+ \frac{(0.062)(189.7)}{(0.765)(1.20673) + (0.126)(1.57415) + 0.062 + (0.047)(1.17883)}$$

$$+ \frac{(0.047)(233.0)}{(0.765)(1.01315) + (0.126)(1.35843) + (0.062)(0.81515) + 0.047}$$

$$\mu_m = 198.9 \mu\text{P}$$

### 3.1.4.6 Ecuaciones empíricas para viscosidad de líquidos

Para el caso de líquidos, son pocos los modelos que permitan predecir la viscosidad a partir de otra información conocida. Si se conoce la viscosidad del líquido a dos temperaturas diferentes, se puede emplear la ecuación de Andrade, que relaciona el logaritmo de la viscosidad con el recíproco de la temperatura absoluta:

$$\ln \mu = A + \frac{B}{T} \tag{3.40}$$

Si sólo se tiene un dato de viscosidad, es posible obtener una estimación de la viscosidad a otra temperatura empleando la ecuación de Lewis-Squires, aunque los errores pueden estar entre 5 a 15% o mayores:

$$\mu = \left[ \mu_{(1)}^{-0.2661} + \frac{T - T_{(1)}}{37.073} \right]^{-3.758} \tag{3.41}$$

donde las viscosidades están en Pa·s, las temperaturas pueden estar en °C o K, ya que sólo se usa su diferencia, y  $\mu_{(1)}$  es el valor conocido de la viscosidad a la temperatura  $T_{(1)}$ . Este método no debe emplearse para temperaturas muy por encima del punto de ebullición normal.

#### EJEMPLO 3.7

Un aceite para motor tiene una viscosidad de 3850 cP a 0 °C y de 53 cP a 65 °C. Asumiendo que la ecuación de Andrade es aplicable para este aceite, estimar su viscosidad a 25 °C.

#### SOLUCIÓN

En este caso, se conoce el valor de la viscosidad a dos temperaturas diferentes, por lo que la ecuación de Andrade puede escribirse dos veces como:

$$\ln \mu_1 = A + \frac{B}{T_1} \quad \text{y} \quad \ln \mu_2 = A + \frac{B}{T_2}$$

con lo que se tiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas ( $A$  y  $B$ ). Sustituyendo los datos:

$$\begin{cases} \ln(3850) = A + \left(\frac{1}{273.15}\right)B \\ \ln(53) = A + \left(\frac{1}{338.15}\right)B \end{cases}$$

Al resolver el sistema se obtienen los valores de  $A$  y  $B$  para el aceite:

$$\begin{aligned} A &= -14.039 \\ B &= 6089.8 \end{aligned}$$

Finalmente, estos valores de  $A$  y  $B$ , se sustituyen en la ecuación de Andrade con la temperatura indicada en el enunciado para encontrar la viscosidad buscada: ■

$$\ln \mu = -14.039 + \frac{6089.8}{298.15}$$

$$\ln \mu = 6.3863$$

$$\mu = e^{6.3863}$$

$$\mu = 593.6 \text{ cP}$$

### 3.1.4.7 Método de Przedziecki y Sridhar (viscosidad de líquidos puros)

Su ecuación principal es:

$$\mu = \frac{\tilde{V}_0}{E(\tilde{V} - \tilde{V}_0)} \quad (3.42)$$

En este método,  $\mu$  es la viscosidad en cP,  $\tilde{V}$  es el volumen molar de líquido en  $\text{cm}^3/\text{mol}$  a la temperatura de interés, y  $E$  y  $\tilde{V}_0$  están dados por:

$$\tilde{V}_0 = \frac{\tilde{V}_m}{0.342(T_m / T_c) + 0.894} + 0.0085\omega T_c - 2.02 \quad (3.43)$$

$$E = \frac{\tilde{V}_c}{12.94 + 0.10M - 0.23P_c + 0.0424T_m - 11.58(T_m / T_c)} - 1.12 \quad (3.44)$$

donde  $\tilde{V}_c$  es el volumen molar en el punto crítico, en  $\text{cm}^3/\text{mol}$ ,  $T_c$  es la temperatura crítica en K,  $P_c$  es la presión crítica en bar,  $M$  es el peso molecular en  $\text{g}/\text{mol}$ ,  $T_m$  es la temperatura del punto de fusión en K, y  $\omega$  es el factor acéntrico. Se recomienda que el volumen molar  $\tilde{V}$  (a la temperatura de interés) y  $\tilde{V}_m$  (a la temperatura  $T_m$ ) se estimen con el método de Gunn y Yamada:

$$\tilde{V}(T) = \frac{f(T)}{f(T_{\text{ref}})} \tilde{V}_{\text{ref}} \quad (3.45)$$

donde  $\tilde{V}_{\text{ref}}$  es el valor experimental del volumen molar de líquido a la temperatura  $T_{\text{ref}}$ , y la función  $f(T)$  es:

$$f(T) = H_1(1 - \omega H_2) \quad (3.46)$$

con  $H_1$  y  $H_2$  funciones de la temperatura reducida  $T_r$ :

$$H_1 = 0.33593 - 0.33953T_r + 1.51941T_r^2 - 2.02512T_r^3 + 1.11422T_r^4 \quad (3.47)$$

$$H_2 = 0.29607 - 0.09045T_r - 0.04842T_r^2 \quad (3.48)$$

Este método puede dar errores grandes cuando la temperatura es baja ( $T_r < 0.55$ ).

**EJEMPLO 3.8**

Estimar la viscosidad de m-xileno líquido a 140 °C, empleando el método de Przedziecki y Sridhar.

**SOLUCIÓN**

Los siguientes datos requeridos del m-xileno se obtuvieron del apéndice A de Poling (2000):  $M = 106.167$  g/mol,  $T_m = 225.28$  K,  $T_c = 617.0$  K,  $P_c = 35.41$  bar,  $\tilde{V}_c = 375$  cm<sup>3</sup>/mol,  $\omega = 0.327$ . También de la misma fuente, se obtiene el volumen molar de líquido, 123.47 cm<sup>3</sup>/mol a 298.15 K, que se emplea como volumen molar de referencia

Con la temperatura de referencia  $T_{ref} = 298.15$  K se calcula  $f(T_{ref})$ , evaluando primero  $H_1$  y  $H_2$  en función de la temperatura reducida (de referencia):

$$T_{r,ref} = \frac{T_{ref}}{T_c} = \frac{298.15 \text{ K}}{617.0 \text{ K}} = 0.4832$$

$$H_1 = 0.33593 - 0.33953T_r + 1.51941T_r^2 - 2.02512T_r^3 + 1.11422T_r^4$$

$$H_1 = 0.33593 - 0.33953(0.4832) + 1.51941(0.4832)^2 - 2.02512(0.4832)^3 + 1.11422(0.4832)^4$$

$$H_1 = 0.35890$$

$$H_2 = 0.29607 - 0.09045T_r - 0.04842T_r^2$$

$$H_2 = 0.29607 - 0.09045(0.4832) - 0.04842(0.4832)^2$$

$$H_2 = 0.24106$$

$$f(T_{ref}) = H_1(1 - \omega H_2)$$

$$f(T_{ref}) = 0.35890(1 - 0.327 \times 0.24106)$$

$$f(T_{ref}) = 0.3306$$

Para encontrar el volumen molar a la temperatura de interés, es necesario recalculer  $H_1$ ,  $H_2$  y  $f(T)$ , pero ahora a la temperatura reducida de interés:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{413.15 \text{ K}}{617.0 \text{ K}} = 0.6696$$

$$H_1 = 0.40583$$

$$H_2 = 0.21379$$

$$f(T) = 0.3775$$

Por lo tanto:

$$\tilde{V}(T) = \frac{f(T)}{f(T_{ref})} \tilde{V}_{ref}$$

$$\tilde{V}(T) = \frac{0.3775}{0.3306} \times 123.47$$

$$\tilde{V}(T) = 140.97 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

Se procede de la misma forma para obtener  $\tilde{V}(T_m)$ , el volumen molar a la temperatura de fusión, empleando la temperatura de fusión reducida:

$$T_{r,m} = \frac{T_m}{T_c} = \frac{225.28 \text{ K}}{617.0 \text{ K}} = 0.3651$$

$$H_1 = 0.33575$$

$$H_2 = 0.25659$$

$$f(T_m) = 0.3076$$

$$\tilde{V}(T_m) = \frac{f(T_m)}{f(T_{ref})} \tilde{V}_{ref}$$

$$\tilde{V}(T_m) = \frac{0.3076}{0.3306} \times 123.47$$

$$\tilde{V}(T_m) = 114.87 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

Luego se procede a calcular  $\tilde{V}_0$  y  $E$ :

$$\tilde{V}_0 = \frac{\tilde{V}_m}{0.342(T_m/T_c) + 0.894} + 0.0085\omega T_c - 2.02$$

$$\tilde{V}_0 = \frac{114.87}{0.342\left(\frac{225.28}{617.0}\right) + 0.894} + 0.0085(0.327)(617.0) - 2.02$$

$$\tilde{V}_0 = 112.44$$

$$E = \frac{\tilde{V}_c}{12.94 + 0.10M - 0.23P_c + 0.0424T_m - 11.58(T_m/T_c)} - 1.12$$

$$E = \frac{375}{12.94 + 0.10(106.167) - 0.23(35.41) + 0.0424(225.28) - 11.58\left(\frac{225.28}{617.0}\right)} - 1.12$$

$$E = 16.964$$

Finalmente, se calcula la viscosidad buscada:

$$\mu = \frac{\tilde{V}_0}{E(\tilde{V} - \tilde{V}_0)}$$

$$\mu = \frac{112.44}{16.964(140.97 - 112.44)}$$

$$\mu = 0.232 \text{ cP}$$

El valor reportado en la Tabla 9-11 de Poling (2000) es 0.218 cP, por lo que el error de la estimación es 6.4%. ■

### 3.1.4.8 Ecuación de Lucas (viscosidad de líquidos puros a alta presión)

La viscosidad de líquidos no es afectada por la presión, excepto para presiones moderadas y altas, en cuyo caso se puede usar la ecuación de Lucas para estimar el efecto de la presión:

$$\frac{\mu}{\mu_{sat}} = \frac{1 + D(0.47214\Delta P_r)^A}{1 + C\omega\Delta P_r} \quad (3.49)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del líquido a alta presión y  $\mu_{sat}$  es la viscosidad del líquido saturado a la misma temperatura.  $\Delta P_r$  es la diferencia reducida entre la presión y la presión de vapor:

$$\Delta P_r = \frac{P - P_{vap}}{P_c} \quad (3.50)$$

y los parámetros  $A$ ,  $C$  y  $D$  son funciones de la temperatura reducida:

$$A = 0.9991 - \frac{4.674 \times 10^{-4}}{1.0523T_r^{-0.03877} - 1.0513} \quad (3.51)$$

$$C = -0.07921 + 2.1616T_r - 13.4040T_r^2 + 44.1706T_r^3 - 84.8291T_r^4 + 96.1209T_r^5 - 59.8127T_r^6 + 15.6719T_r^7 \quad (3.52)$$

$$D = \frac{0.3257}{(1.0039 - T_r^{2.573})^{0.2906}} - 0.2086 \quad (3.53)$$

#### EJEMPLO 3.9



La fosa de las Marianas es el punto más profundo del océano (10.91 km), con una presión promedio de 1100 bar y una temperatura de 4 °C. Estimar la viscosidad del agua de mar en esas condiciones. A 4 °C y 1 atm, la viscosidad del agua de mar (con una salinidad típica de 35 g/kg) es 1.72 cP, su densidad es 1.028 kg/m<sup>3</sup>, y su presión de vapor es 721 Pa. Otros datos pueden asumirse los del agua pura.

#### SOLUCIÓN

Los siguientes datos del agua pura se tomaron de Poling (2000):  
 $T_c = 647.3$  K,  $P_c = 221.2$  bar,  $\omega = 0.344$ .

El ajuste de la viscosidad de líquido a alta presión se puede hacer con la ecuación de Lucas:

$$\frac{\mu}{\mu_{sat}} = \frac{1 + D(0.47214\Delta P_r)^A}{1 + C\omega\Delta P_r}$$

Primero se calcula la temperatura reducida:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{277.15 \text{ K}}{647.3 \text{ K}} = 0.42816$$

Luego se calculan los parámetros  $A$ ,  $C$  y  $D$ :

$$A = 0.9991 - \frac{4.674 \times 10^{-4}}{1.0523T_r^{-0.03877} - 1.0513}$$

$$A = 0.9991 - \frac{4.674 \times 10^{-4}}{1.0523(0.42816)^{-0.03877} - 1.0513}$$

$$A = 0.98618$$

$$C = -0.07921 + 2.1616T_r - 13.4040T_r^2 + 44.1706T_r^3 - 84.8291T_r^4 + 96.1209T_r^5 - 59.8127T_r^6 + 15.6719T_r^7$$

$$C = -0.07921 + 2.1616(0.42816) - 13.4040(0.42816)^2 \\ + 44.1706(0.42816)^3 - 84.8291(0.42816)^4 \\ + 96.1209(0.42816)^5 - 59.8127(0.42816)^6 \\ + 15.6719(0.42816)^7$$

$$C = 0.061161$$

$$D = \frac{0.3257}{(1.0039 - T_r^{2.573})^{0.2906}} - 0.2086$$

$$D = \frac{0.3257}{(1.0039 - (0.42816)^{2.573})^{0.2906}} - 0.2086$$

$$D = 0.12819$$

También se calcula la diferencia de presión reducida  $\Delta P_r$  :

$$\Delta P_r = \frac{P - P_{vap}}{P_c}$$

$$\Delta P_r = \frac{1100 \text{ bar} - 7.21 \times 10^{-3} \text{ bar}}{221.2 \text{ bar}}$$

$$\Delta P_r = 4.9728$$

Finalmente se sustituye en la ecuación del método de Lucas:

$$\frac{\mu}{\mu_{sat}} = \frac{1 + D(0.47214\Delta P_r)^A}{1 + C\omega\Delta P_r}$$

$$\frac{\mu}{\mu_{sat}} = \frac{1 + 0.12819[0.47214(4.9728)]^{0.98618}}{1 + (0.061161)(0.344)(4.9728)}$$

$$\frac{\mu}{\mu_{sat}} = 1.17456$$

Con la viscosidad del agua de mar saturada  $\mu_{sat}$  de 1.72 cP, se encuentra la viscosidad del agua de mar en el fondo de la fosa de las Marianas:

$$\mu = 1.17456(1.72 \text{ cP})$$

$$\mu = 2.02 \text{ cP}$$

■

### 3.1.4.9 Reglas de mezclado (viscosidad de mezclas de líquidos)

Para una mezcla líquida de hidrocarburos se puede emplear la regla de mezclado propuesta por Kendall y Monroe:

$$\mu_m^{1/3} = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i^{1/3} \quad (3.54)$$

Para una mezcla líquida definida de no hidrocarburos, se recomienda (Perry, 2004) esta otra regla de mezclado:

$$\ln \mu_m = \sum_{i=1}^n x_i \ln \mu_i \quad (3.55)$$

En estas dos ecuaciones,  $\mu_m$  tendrá las mismas unidades que se usen para las viscosidades de los compuestos puros.

#### EJEMPLO 3.10

81937.28

Estimar la viscosidad a temperatura ambiente de una mezcla líquida con 33% mol de acetonitrilo y 67% mol de acetato de butilo. La viscosidad de los componentes puros a temperatura ambiente es 0.37 y 2.98 cP, respectivamente.

#### SOLUCIÓN

Ya que el acetonitrilo y el acetato de butilo no son hidrocarburos, se recomienda la regla de mezclado:

$$\ln \mu_m = \sum x_i \ln \mu_i$$

donde  $x_i$  es la fracción mol del componente  $i$ . Para dos componentes, se tiene:

$$\ln \mu_m = x_1 \ln \mu_1 + x_2 \ln \mu_2$$

Se puede sustituir directamente la viscosidad de los componentes puros en centipoise; el resultado estará dado en las mismas unidades.

$$\ln \mu_m = 0.33 \ln(0.37) + 0.67 \ln(2.98)$$

$$\ln \mu_m = 0.40349$$

Finalmente, se aplica la función exponencial para eliminar el logaritmo:

$$\mu_m = e^{0.40349}$$

$$\mu_m = 1.5 \text{ cP}$$

■

### 3.1.5 Reología

La **reología** es “el estudio del comportamiento de la materia cuando se sujeta a deformaciones”. El término fue acuñado por Eugene Bingham alrededor de 1920. El pilar principal de la reología es la idea, planteada por primera vez por los filósofos griegos, de que “todo fluye”, es decir, que cualquier material puede ser deformado permanentemente mediante la aplicación de una fuerza. Incluso un sólido, si se le aplica una fuerza durante un tiempo suficientemente prolongado, fluirá.

A su vez, la **reometría** es la aplicación práctica de la reología para la determinación de los *parámetros reológicos*, es decir, aquellas propiedades de un fluido que caracterizan su respuesta a la deformación, de acuerdo a algún modelo matemático (modelo reológico).

El modelo reológico más simple es la ley de Newton de la viscosidad, que expresa una relación de proporcionalidad entre el esfuerzo  $\tau$  y la rapidez de deformación  $\dot{\gamma}$ . A los fluidos que se comportan de acuerdo a esta relación se les denomina **fluidos newtonianos**.

$$\tau = -\mu \dot{\gamma} \quad (3.56)$$

(fluidos newtonianos)

La viscosidad  $\mu$  del fluido no depende de  $\tau$  ni de  $\dot{\gamma}$ , por lo que suele decirse que es constante. Sin embargo, hay que recordar que depende de la temperatura, la presión, y la composición química del fluido, por lo que no es constante en el sentido estricto.

Por otro lado, los **fluidos no newtonianos** son todos aquellos que no obedecen la ley de Newton de la viscosidad. Para esta clase de fluidos suele plantearse una ecuación equivalente a la ecuación anterior:

$$\tau = -\eta \dot{\gamma} \quad (3.57)$$

(fluidos no newtonianos)

donde  $\eta$  se conoce como **viscosidad aparente**, y puede depender de  $\tau$ ,  $\dot{\gamma}$  o del tiempo, además de depender de la temperatura, presión y composición química.

### 3.1.6 Clasificación reológica de los fluidos

En primera instancia, es necesario mencionar que la mayoría de los fluidos simples (tales como aire y otros gases, agua, mercurio, compuestos orgánicos no poliméricos, algunos aceites, etcétera), se caracterizan por un comportamiento que no depende de la magnitud de las fuerzas aplicadas al fluido ni de qué tan rápido estén fluyendo: se dice que son fluidos de *viscosidad constante* (aunque sí puede depender de la temperatura, presión y composición química). Ya que se comportan de acuerdo a la ley de Newton de la viscosidad, se denominan *fluidos newtonianos*.

Por otro lado, existe una gran cantidad de fluidos (incluyendo soluciones de polímeros, suspensiones de partículas sólidas, mezclas complejas) cuyo comportamiento sí depende de la magnitud de la fuerza aplicada o de qué tan rápido

esté fluyendo, por lo que presentan una *viscosidad variable*. Dado que estos fluidos no se comportan de acuerdo a lo predicho por la ley de Newton de la viscosidad, se denominan *fluidos no newtonianos*.

Algunos fluidos no newtonianos incluso pueden presentar un comportamiento sólido cuando la fuerza aplicada no es lo suficientemente grande: por ejemplo, la pasta de dientes fluye al ser presionada para salir del tubo, pero se mantiene como sólido una vez fuera de éste.

Los fluidos no newtonianos (Tabla 3.5) se clasifican en primera instancia con base en su comportamiento cuando se mantienen sujetos a las mismas condiciones de flujo durante un cierto tiempo: los que siempre mantienen las mismas características se dice que son *independientes del tiempo*, mientras que los que van cambiando su comportamiento se denominan *dependientes del tiempo*.

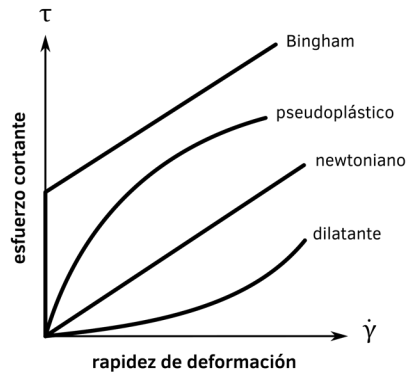
**Tabla 3.5** Clasificación de los fluidos no newtonianos.

CLASIFICACIÓN		CARACTERÍSTICAS	EJEMPLOS	
FLUIDOS NO NEWTONIANOS	Independientes del tiempo	<b>Plástico de Bingham</b> (Bingham plastic)	Se comporta como sólido hasta alcanzar un cierto esfuerzo (cedencia) y luego se comporta similar a un fluido newtoniano	pasta de dientes, arcilla húmeda, mayonesa, crema batida, algunos lodos
		<b>Pseudoplástico</b> (shear thinning)	La viscosidad aparente disminuye al aumentar la rapidez de deformación	pulpa de papel en agua, algunas pinturas, hielo, sangre, jarabes, melaza, gel para cabello, soluciones de algunos polímeros de alto peso molecular
		<b>Dilatante</b> (shear thickening)	La viscosidad aparente aumenta al aumentar la rapidez de deformación	suspensiones de almidón en agua, arena movediza
	Dependientes del tiempo	<b>Tixotrópico</b> (thixotropic)	La viscosidad aparente disminuye respecto al tiempo, al mantener una rapidez de deformación constante	algunas arcillas, pinturas, catsup, yogurt, líquido sinovial, algunos geles y coloides
		<b>Reopéctico</b> (rheopectic)	La viscosidad aparente aumenta respecto al tiempo al mantener una rapidez de deformación constante	algunos lubricantes, suspensiones de yeso, tintas de impresión
		<b>Viscoelástico</b> (viscoelastic)	Recobra parcialmente su forma al eliminar el esfuerzo aplicado	polímeros, metales a altas temperaturas, ligamentos y tendones

A continuación, se detallan las características principales de cada tipo de fluido. Es importante señalar que, dependiendo de las condiciones, un fluido puede presentar el comportamiento de más de una categoría. Por ejemplo, algunos fluidos pseudoplásticos son también tixotrópicos.

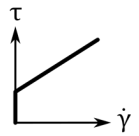
### 3.1.6.1 Fluidos independientes del tiempo

En esta categoría entran todos los fluidos (incluidos los newtonianos) cuya viscosidad aparente permanece inalterada al transcurrir el tiempo, cuando se someten a una cierta rapidez de deformación. Dentro de los fluidos independientes del tiempo, se encuentran los *plásticos de Bingham*, los fluidos *pseudoplásticos* y los fluidos *dilatantes*. La Figura 3.15 muestra el comportamiento de los fluidos independientes del tiempo, caracterizado por su curva esfuerzo-deformación. En esta figura se incluye como referencia la línea correspondiente a un fluido newtoniano.



**Figura 3.17** Comportamiento de fluidos independientes del tiempo.

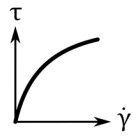
En primera instancia se tiene los **plásticos de Bingham**, también conocidos como plásticos ideales. Este tipo de fluido muestra un comportamiento de sólido cuando se somete a esfuerzos pequeños, pero cuando el esfuerzo alcanza un cierto umbral, llamado *esfuerzo de cedencia*, comienza a fluir, mostrando una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación. Para esfuerzos por debajo del esfuerzo de cedencia, el plástico de Bingham se comporta como si tuviera una viscosidad aparente infinita. Debido al esfuerzo de cedencia, la superficie de un plástico de Bingham puede presentar picos, que no fluyen bajo su propio peso a menos que sean lo suficientemente grandes.



Este comportamiento frecuentemente se debe a la presencia de partículas sólidas en el fluido que crean una estructura débil. El esfuerzo de cedencia representa entonces el esfuerzo requerido para romper dicha estructura. Una vez separadas, las partículas se mueven junto con el resto del fluido. Al eliminar el esfuerzo, las partículas se vuelven a asociar, regenerando el comportamiento sólido.

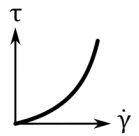
El ejemplo clásico de un plástico de Bingham es la pasta de dientes, que sólo fluye saliendo de su tubo cuando se aplica suficiente presión, y una vez fuera mantiene su forma cuando está sujeta sólo a la fuerza de gravedad. Otros fluidos que presentan este comportamiento son la arcilla húmeda, la mayonesa, la crema batida y algunos lodos.

Los fluidos **pseudoplásticos** muestran un comportamiento reminiscente de los plásticos de Bingham (de ahí su nombre). Son fluidos que presentan una mayor viscosidad aparente cuando la rapidez de deformación es baja, pero que disminuyen su viscosidad cuando aumenta la rapidez de deformación. Este comportamiento se identifica en la Figura 3.22 como una mayor pendiente de la curva cerca del origen, que disminuye conforme aumenta la rapidez de deformación. Si se tuviera un fluido pseudoplástico en un contenedor, se sentiría menos viscoso si se agita rápidamente, comparado con su consistencia aparente si se agita lentamente.



Muchas pinturas se diseñan para presentar un comportamiento pseudoplástico. Con esto se busca que presenten una baja viscosidad aparente cuando se sujetan a grandes esfuerzos (por ejemplo, al ser aplicadas con brocha) pero que su viscosidad aparente sea mayor cuando sólo estén sujetas a pequeños esfuerzos (su propio peso, por ejemplo, al estar ya aplicadas en una pared vertical). Otros fluidos pseudoplásticos incluyen suspensiones de pulpa de papel en agua, sangre, gel para el cabello y soluciones de polímeros de alto peso molecular.

Por otro lado, los fluidos **dilatantes** presentan el comportamiento opuesto a los fluidos pseudoplásticos: su viscosidad aparente aumenta al aumentar la rapidez de deformación. En la Figura 3.22, la pendiente de la curva de un fluido dilatante es menor cerca del origen, y aumenta al aumentar la rapidez de deformación. Si se tiene un fluido dilatante en un recipiente, se siente más viscoso entre más rápido se agite.

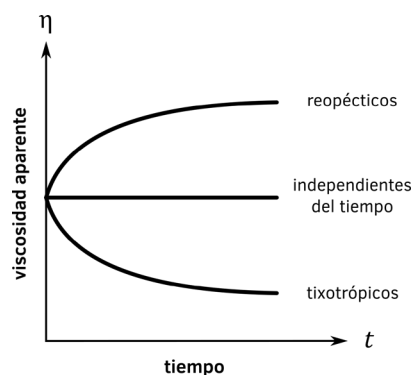


Este comportamiento suele deberse a la presencia de partículas sólidas en el fluido que tienden a aglomerarse cuando el fluido se sujeta a una deformación: el aglomerado presenta una mayor resistencia a la deformación que las partículas individuales.

Un fluido dilatante de fabricación casera es una suspensión de almidón en agua, que puede ser mezclada si se agita lentamente, pero presenta un comportamiento altamente viscoso (casi sólido) si se intenta agitar rápidamente.

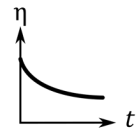
### 3.1.6.2 Fluidos dependientes del tiempo

En esta categoría se incluyen los fluidos cuya viscosidad aparente sí cambia al transcurrir el tiempo, aún cuando se mantengan las mismas condiciones de esfuerzo o rapidez de deformación. Los fluidos dependientes del tiempo incluyen los fluidos *tixotrópicos*, los fluidos *reopécticos* y los fluidos *viscoelásticos*. El comportamiento de los fluidos se presenta generalmente en una gráfica de  $\eta$  versus tiempo (Figura 3.23). En esta gráfica, los fluidos independientes del tiempo mostrarán una viscosidad aparente que permanece sin cambio.



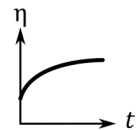
**Figura 3.18** Comportamiento de fluidos dependientes del tiempo.

En primera instancia, los fluidos **tixotrópicos** son aquéllos que muestran una disminución de la viscosidad aparente, al mantener una rapidez de deformación constante. Si se tiene un fluido tixotrópico en un recipiente, y se agita con una rapidez constante, se notará que cada vez se requiere menos esfuerzo para continuar la agitación, debido a la disminución de la viscosidad aparente.



El ejemplo clásico de un fluido tixotrópico es la salsa catsup: inicialmente presenta cierta viscosidad (que suele dificultar su salida de la botella), pero después de agitarla fluye con mucha mayor facilidad, porque su viscosidad aparente se ha reducido. Otros fluidos tixotrópicos incluyen algunas arcillas, pinturas, yogurt, líquido sinovial y algunos geles y coloides.

El comportamiento opuesto lo presentan los fluidos **reopécticos**, en los que la viscosidad aparente aumenta cuando se sujetan a una rapidez de deformación constante. Este comportamiento es mucho más raro que el comportamiento tixotrópico. Un ejemplo son las tintas de impresión, que se formulan para tener una viscosidad relativamente baja al imprimir, pero que aumentan rápidamente de viscosidad para evitar que la impresión “se corra” en el papel. Otros ejemplos son algunos lubricantes y las suspensiones de yeso.



Finalmente, los fluidos **viscoelásticos** presentan un comportamiento intermedio entre un fluido viscoso y un sólido elástico, lo que permite que recobren parcialmente su forma al eliminar el esfuerzo aplicado (comparar con los ejemplos de sólidos y fluidos de las Figuras 1.2 y 1.3). Los fluidos viscoelásticos no se incluyen en el diagrama de la Figura 3.23, porque su comportamiento depende no sólo de la rapidez de deformación, sino también de la deformación en sí. El comportamiento viscoelástico es frecuentemente observado en polímeros, así como en metales a altas temperaturas y en ligamentos y tendones.

### 3.1.7 Modelos reológicos

Un *modelo reológico* es una expresión matemática, generalmente empírica, que describe la relación entre el esfuerzo y la deformación de un fluido. Es importante aclarar que un modelo reológico puede servir para describir el *comportamiento reológico* de más de un tipo de fluido, dependiendo de los valores que tomen los parámetros que contenga el modelo.

A continuación se describen algunos de los modelos reológicos más comunes.

**Modelo de Bingham:** Como su nombre lo indica, es el adecuado para describir el comportamiento de plásticos de Bingham. Tiene dos parámetros: el esfuerzo de cedencia ( $\tau_0$ ) y una viscosidad plástica ( $\mu_0$ ).

$$\begin{cases} \tau = -\mu_0 \dot{\gamma} \pm \tau_0 & \text{si } |\tau| > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{si } |\tau| \leq \tau_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Para la primera ecuación, se toma el signo positivo si  $\tau > 0$  y el signo negativo si  $\tau < 0$ .

La viscosidad aparente en el modelo de Bingham es:

$$\eta = \begin{cases} \mu_0 \mp \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{si } |\tau| > \tau_0 \\ \infty & \text{si } |\tau| \leq \tau_0 \end{cases} \quad (3.59)$$

**Modelo de Ostwald – de Waele:** También llamado *ley de la potencia*, este modelo es adecuado para el comportamiento de fluidos pseudoplásticos y dilatantes. Tiene dos parámetros, conocidos como índice de consistencia de flujo ( $K$ ) y un índice de comportamiento de flujo ( $n$ ).

$$\tau = -K |\dot{\gamma}|^{n-1} (\dot{\gamma}) \quad (3.60)$$

Cuando  $n < 1$  el modelo predice un comportamiento pseudoplástico, y cuando  $n > 1$  da un comportamiento dilatante. Cuando  $n = 1$ , el modelo se reduce a la ley de Newton de la viscosidad con  $\mu = K$ . La viscosidad aparente en el modelo de Ostwald – de Waele es:

$$\eta = K |\dot{\gamma}|^{n-1} \quad (3.61)$$

**Modelo de Carreau:** Este modelo representa un fluido que a baja velocidad de deformación sigue la ley de Newton de la viscosidad, y a alta velocidad de deformación obedece la ley de la potencia.

$$\tau = - \left\{ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} (\dot{\gamma}) \quad (3.62)$$

donde  $\mu_0$  es la viscosidad aparente a baja velocidad de deformación (Pa·s),  $\mu_\infty$  es la viscosidad aparente a alta velocidad de deformación (Pa·s),  $\lambda$  es un tiempo de relajación (s), y  $n$  es un índice de comportamiento.

**Modelo de Maxwell:** Éste es el modelo lineal más simple que describe el comportamiento de un fluido viscoelástico.

$$\tau + \lambda_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\eta_0 \dot{\gamma} \quad (3.63)$$

donde  $\lambda_1$  es una constante llamada *tiempo de relajación* y  $\eta_0$  de llama *viscosidad a cero rapidez de deformación*. Cuando el tensor de esfuerzo cambia muy lentamente, se puede ignorar el segundo término del lado izquierdo, y el

fluido se comporta como newtoniano. Por otro lado, si el esfuerzo cambia muy rápidamente, se puede ignorar el primer término, integrar la ecuación, y se tiene una ecuación para un sólido elástico (modelo de Hooke).

## 3.2 Arrastre y sustentación

El **transporte convectivo** de momentum es el mecanismo de transferencia por medio del cual el momentum pasa de un fluido en movimiento a un objeto sólido. Generalmente se clasifica en *arrastre y sustentación*, según si la dirección de la fuerza sobre el objeto es paralela o perpendicular respecto a la dirección del movimiento del fluido. De hecho, es frecuente que se presentan ambos fenómenos simultáneamente.

### 3.2.1 Fuerza de arrastre

En el caso del arrastre se distinguen a su vez dos mecanismos: el *arrastre viscoso* y el *arrastre de forma*, siendo el primero dominante cuando la velocidad del fluido es baja, y el segundo domina cuando la velocidad del fluido es alta.

Para analizar el caso del **arrastre viscoso**, considérese una esfera estacionaria inmersa en un fluido en movimiento. (Figura 3.19). Por convenciencia, se asume que la esfera está fija y el fluido se mueve, pero el efecto resultante es el mismo si la esfera se mueve y el fluido permanece estacionario (dado que el movimiento es relativo).

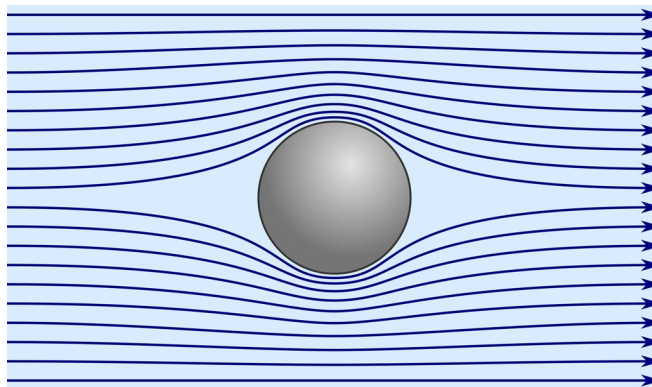


Figura 3.19 Esfera inmersa en un fluido en movimiento.

Debido a la condición de no-deslizamiento, la velocidad del fluido tiene que ser cero en la superficie del objeto. Por lo tanto, existe un perfil de velocidades en el fluido alrededor de la esfera, y existe un transporte viscoso de momentum desde las capas de mayor velocidad a las capas de menor velocidad (Figura 3.20).

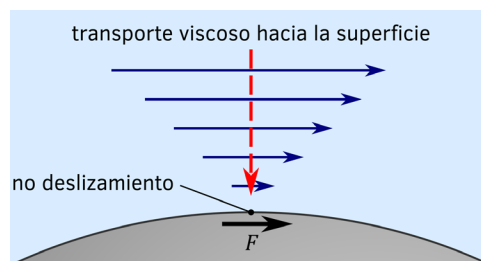
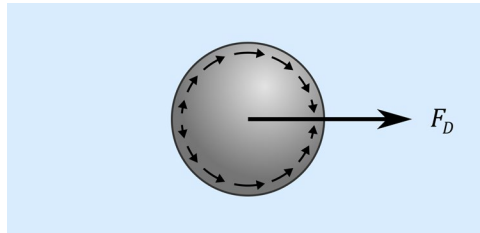


Figura 3.20 Arrastre viscoso: perfil de velocidad del fluido cerca de la superficie.

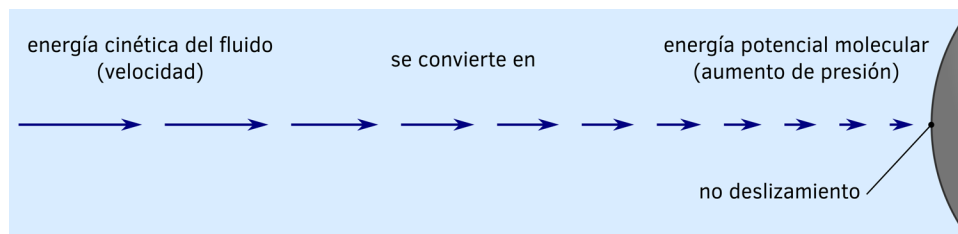
En cada punto de la superficie, el fluido ejerce una fuerza debido al momentum que está desapareciendo. La resultante de todas estas fuerzas será una fuerza de arrastre en la dirección del movimiento del fluido (Figura 3.21). Dado que el transporte viscoso depende del gradiente de velocidad, el *arrastre viscoso es proporcional a la velocidad del fluido*.



**Figura 3.21** Arrastre viscoso: fuerzas sobre la superficie y su resultante.

En el caso del **arrastre de forma**, es conveniente examinar qué ocurre con el fluido que se mueve directamente en línea con el centro del objeto\*. También en este caso, debido a la condición de no deslizamiento, la velocidad del fluido tiene que ser cero en la superficie del objeto, por lo que el fluido tiene que *desacelerarse* a medida que se acerca al objeto.

Al reducirse la velocidad, la energía cinética global del fluido tiene que disminuir, pero el principio de conservación de la energía dicta que esta energía no desaparece, sino que se debe convertir en otras formas de energía. Al frenarse, el fluido sufre una compresión que reduce la distancia promedio entre las moléculas, causando un aumento de la energía potencial entre ellas. (Figura 3.22).



**Figura 3.22** Arrastre de forma: conservación de energía del fluido.

Este aumento de la energía potencial molecular se manifiesta como un aumento de presión. Como resultado, la presión del fluido es diferente en cada punto de la superficie de la esfera. Cuando se suman las componentes horizontales de estas fuerzas de presión en toda la superficie, se obtiene una fuerza de arrastre resultante que actúa en la dirección del flujo (Figura 3.23). Ya que el aumento de presión depende de la energía cinética del fluido, *el arrastre de forma es proporcional al cuadrado de la velocidad del fluido*.

\* Esto es sólo por conveniencia. El análisis es similar para el flujo que no va directamente al centro, siempre que el fluido se desacelere.

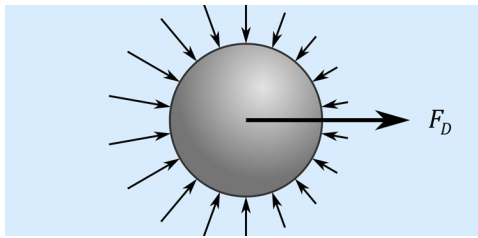


Figura 3.23 Arrastre de forma: fuerzas de presión y su resultante.

### 3.2.2 Fuerza de sustentación

En el caso de la **sustentación**, la fuerza generada es perpendicular a la dirección del movimiento. Considérese el flujo de aire alrededor del ala de un avión (Figura 3.24). El perfil del ala está diseñado para promover un mayor recorrido en la parte superior, comparado con la parte inferior. Como resultado, el aire que pasa por arriba tiene que acelerarse. La energía cinética requerida se obtiene de la energía potencial molecular, aumentando la distancia promedio entre las moléculas (el aire se expande).

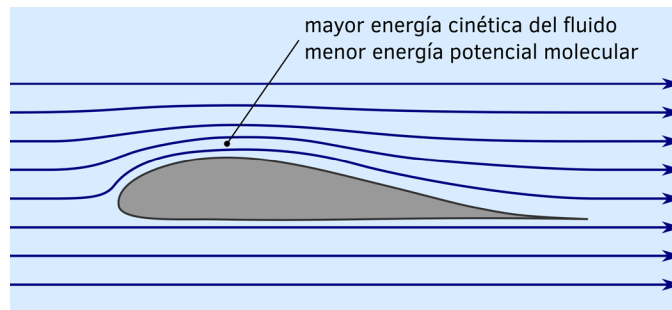


Figura 3.24 Sustentación: conservación de energía del fluido.

Esto hace que la presión en la parte superior del ala disminuya, comparada con la presión en la parte inferior. Al sumar todas las componentes verticales de la fuerza de presión alrededor del ala, se obtiene una resultante hacia arriba, perpendicular a la dirección del movimiento (Figura 3.25).

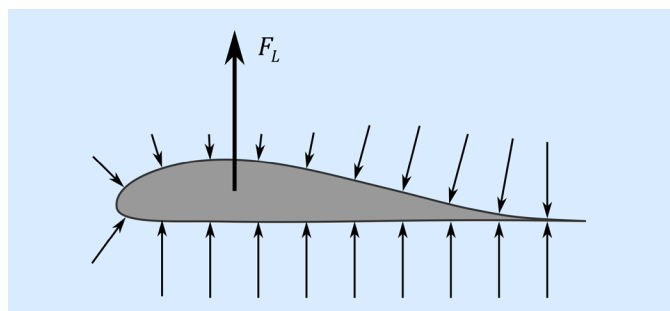


Figura 3.25 Sustentación: fuerzas de presión y su resultante.

## IV. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE CALOR

<b>COMPETENCIAS ESPECÍFICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Interpreta la ley de Fourier de la conducción a partir de los elementos que la componen y su comportamiento.</li> <li>▪ Determina la conductividad térmica en fase gaseosa, líquida o sólida, utilizando las correlaciones y gráficas correspondientes.</li> <li>▪ Determina el flujo de calor por radiación emitido por un cuerpo, utilizando la ley de Stefan-Boltzmann.</li> <li>▪ Calcula la cantidad calor transferido por radiación entre dos superficies.</li> </ul>		
<b>COMPETENCIAS GENÉRICAS</b>	<b>INSTRUMENTALES</b>	<b>INTERPERSONALES</b>	<b>SISTÉMICAS</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas.</li> <li>▪ Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.</li> <li>▪ Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Capacidad de trabajo en equipo.</li> <li>▪ Capacidad crítica y autocrítica.</li> <li>▪ Compromiso ético.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Habilidad para trabajar en forma autónoma.</li> <li>▪ Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.</li> <li>▪ Compromiso con la calidad.</li> </ul>

Recordando las definiciones planteadas previamente, la *temperatura* es una medida de la energía cinética de las moléculas, y el *calor* es la energía que pasa de un lugar a otro debido a una diferencia de temperatura.

La *termodinámica* abarca el estudio de la energía y sus transformaciones. La primera ley de la termodinámica permite determinar *cuánto calor* puede transferirse, y la segunda ley de la termodinámica garantiza que el calor siempre se transfiere de la región de mayor temperatura hacia la región de menor temperatura.

Sin embargo, la termodinámica no proporciona información alguna respecto a *qué tan rápido* se transfiere dicho calor. Para ello hay que recurrir a un área de estudio diferente denominada *transferencia de calor*, que es de suma importancia desde el punto de vista de la ingeniería química. En cualquier proceso de la industria química, es necesario suministrar o remover calor de ciertos materiales. Si dicho calor se transfiere *rápidamente*, el proceso tardará menos o se necesitará de un equipo más pequeño; mientras que, si se transfiere *lentamente*, el proceso necesitará más tiempo o un equipo de mayores dimensiones.

El calor se puede transferir mediante tres mecanismos: *conducción*, *convección* y *radiación*. Frecuentemente, la transferencia ocurre simultáneamente por más de uno de estos mecanismos.

- ★ La **conducción** es el mecanismo *molecular* de transferencia de energía. Se presenta debido a que las moléculas que están a mayor temperatura ceden parte de su energía a las moléculas que están a menor temperatura. En los gases y en los líquidos, las moléculas se mueven y chocan entre sí, mientras que en los sólidos simplemente vibran e interactúan con las moléculas adyacentes. En los metales también se transfiere parte de la energía por el movimiento de electrones libres.
- ★ La **convección** es un mecanismo de transferencia de energía que requiere un *fluido en movimiento adyacente a una interfase*. Es de hecho un fenómeno combinado de conducción cerca de la interfase, y advección lejos de ella. Se clasifica en *convección forzada*, cuando el movimiento del fluido es debido a causas distintas a la transferencia de calor, y en *convección libre*, cuando el movimiento del fluido es debido a la propia transferencia de calor.
- ★ La **radiación** es un mecanismo de transferencia exclusivo de la transferencia de calor, en el que la energía es emitida en forma de ondas electromagnéticas. La característica distintiva de la radiación es que no requiere de un medio material para su transmisión. La cantidad de energía emitida desde un cuerpo depende de la cuarta potencia de su temperatura absoluta.

## 4.1 Conducción

### 4.1.1 Ley de Fourier de la conducción

Como en el caso de la ley de Newton de la viscosidad, se planteará una observación empírica de la relación entre las variables involucradas en la transferencia de calor, para luego generalizar esa observación a un nivel microscópico y deducir la ley de Fourier de la conducción.

Considérese una barra metálica recta, de longitud  $L$  y sección transversal  $A$  uniforme, aislada excepto en los extremos (Figura 4.1). Un extremo de la barra se mantiene a una temperatura constante  $T_1$  y el otro extremo se mantiene a otra temperatura constante  $T_2$  (por ejemplo, manteniéndolos en agua hirviendo y en agua con hielo, respectivamente).

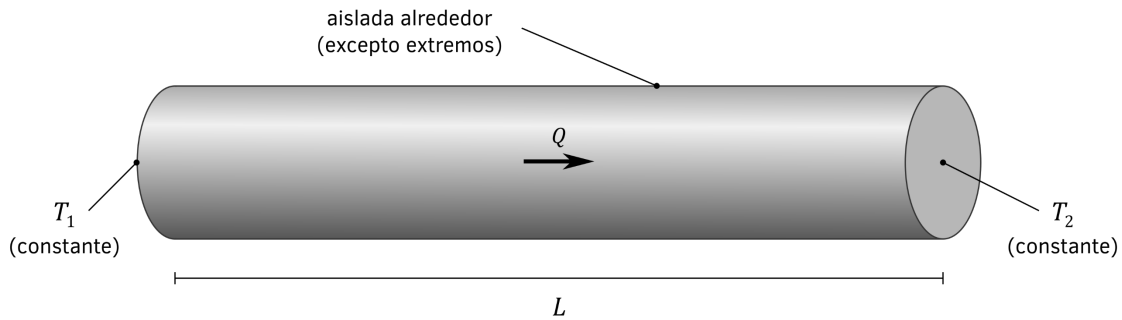


Figura 4.1 Observación empírica de la ley de Fourier.

Experimentalmente se observa que la rapidez de transferencia de calor  $Q$  (en watts,  $1 \text{ W} \equiv 1 \text{ J/s}$ ) es directamente proporcional al área de sección transversal, directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre los extremos, e inversamente proporcional a la longitud de la barra:

$$Q \propto \frac{A(T_2 - T_1)}{L} \quad (4.1)$$

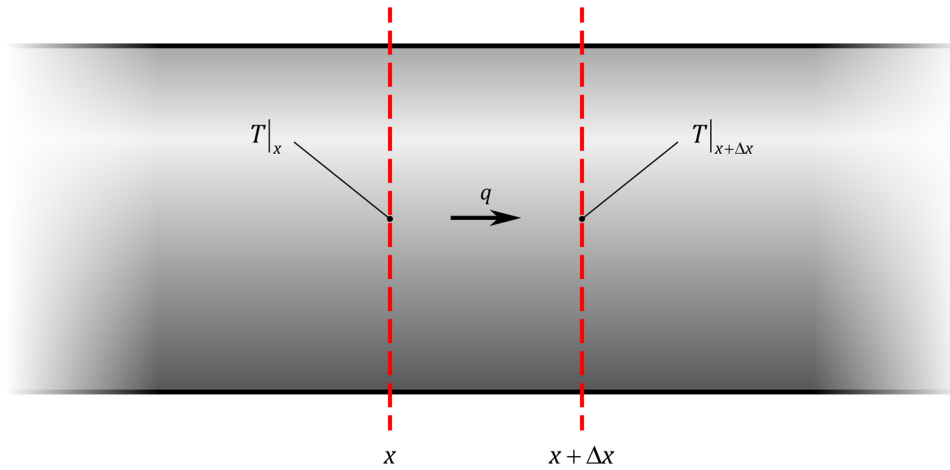
Se define ahora la **densidad de flujo de calor**  $q$  como la rapidez de flujo de calor dividida entre el área:

$$q \equiv \frac{Q}{A} \quad (4.2)$$

Se puede ver inmediatamente que la unidad de  $q$  en el Sistema Internacional es  $\text{W/m}^2$ . Con esta definición, la observación empírica de la ley de Fourier se simplifica a:

$$q \propto \frac{(T_2 - T_1)}{L} \quad (4.3)$$

Ahora se procede a analizar sólo un segmento de la misma barra, ubicado entre las posiciones  $x$  y  $x + \Delta x$  (Figura 4.2). La temperatura en cada lado de dicho segmento debe ser diferente (aunque sea muy pequeña la diferencia), ya que si fueran iguales no habría transferencia de calor. Dichas temperaturas se indican como  $T|_x$  y  $T|_{x+\Delta x}$ , respectivamente, y en este caso se está asumiendo que  $T|_x$  es mayor que  $T|_{x+\Delta x}$ , por la dirección en la que se está indicando que se transfiere el calor.



**Figura 4.2** Deducción a nivel microscópico de la ley de Fourier.

Se considera la observación empírica de la transferencia de calor observada en la barra, pero ahora aplicándola sólo a este segmento de longitud  $\Delta x$ , planteando que la densidad de flujo de calor a través del segmento es directamente proporcional a la diferencia de temperatura a lo largo del segmento, e inversamente proporcional a su longitud:

$$q \propto \frac{T|_x - T|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \quad (4.4)$$

Recordando una de las definiciones matemáticas de la primera derivada:

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

se reconoce inmediatamente la similitud con la ecuación 4.4, donde la función  $f$  es la temperatura. Sin embargo, es necesario recomodar la ecuación porque la definición de la derivada requiere que la función sea evaluada primero en  $x + \Delta x$  y que se le reste la función evaluada en  $x$ . Aplicando un signo negativo enfrente de la fracción:

$$q \propto -\frac{T|_{x+\Delta x} - T|_x}{\Delta x} \quad (4.6)$$

de forma que ahora sí concuerda con la definición de la derivada. Al tomar el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$q \propto -\frac{dT}{dx} \quad (4.7)$$

Para cambiar el signo de proporcionalidad a una igualdad, es necesario introducir una constante de proporcionalidad:

$$q = -k \frac{dT}{dx} \quad (4.8)$$

donde  $k$  es una propiedad del material llamada **conductividad térmica**, y su unidad en el SI es W/m·K.

La ecuación anterior fue deducida para el caso en el que sólo se transfiere calor en la dirección  $x$ . Generalizando, el calor se puede transferir en cualquiera de las tres dimensiones, dando lugar a tres densidades de flujo de calor en coordenadas rectangulares:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.9)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.10)$$

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4.11)$$

donde se ha utilizado además derivadas parciales ya que la temperatura puede ser función de cualquiera de las tres coordenadas o incluso del tiempo.

Dado que la densidad de flujo de calor presenta tres componentes, en realidad corresponde a un vector  $\mathbf{q}$ , y las tres componentes de las ecuaciones 4.9 a 4.11 pueden expresarse como una sola ecuación vectorial:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (4.12)$$

Esta última ecuación es la forma más compacta de la ley de Fourier de la conducción, que se enuncia de la siguiente forma:

- ★ **Ley de Fourier de la conducción:** La densidad de flujo de calor a través de un material es directamente proporcional al gradiente negativo de la temperatura. La constante de proporcionalidad es una propiedad del material denominada *conductividad térmica*.

La conductividad térmica  $k$  es una propiedad de un material que representa la facilidad con la que se conduce el calor a través de dicho material. A los materiales que tienen alta conductividad térmica se les denomina “conductores”, y a los que tienen muy baja conductividad térmica se les denomina “aislantes”.

Su unidad en el Sistema Internacional es  $W/m \cdot K$ . Otras unidades de uso común son  $cal/m \cdot ^\circ C$ ,  $BTU/ft \cdot ^\circ F$ , etcétera. En las unidades de conductividad térmica se usa indistintamente  $K$  o  $^\circ C$  ( $R$  o  $^\circ F$  en el sistema inglés) porque se refiere a una diferencia de temperatura (no al valor en sí de la temperatura).

La conductividad térmica de los gases aumenta con la temperatura. Sin embargo, dado que la conductividad térmica puede depender de algunas otras propiedades (como viscosidad o capacidad calorífica) que a su vez dependen de la temperatura, no es posible establecer una relación simple entre  $k$  y  $T$ . Aunque se han propuesto varias relaciones de la forma  $k = aT^b$ , ninguna es particularmente precisa (Poling, 2000).

En el caso de los líquidos, generalmente la conductividad térmica disminuye cuando aumenta la temperatura, pero la variación es aproximadamente lineal y no muy pronunciada. Por lo tanto, para rangos pequeños de temperatura, la conductividad térmica de un líquido puede representarse con una ecuación lineal del tipo  $k = a + bT$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes que deberán obtenerse a partir de datos experimentales.

En muchos problemas de transferencia de calor, especialmente si las diferencias de temperatura no son muy grandes, es habitual tratar la conductividad térmica como constante, despreciando su variación con respecto a  $T$ . En cálculos prácticos, se puede emplear la conductividad evaluada a la temperatura promedio, o se puede estimar una conductividad promedio  $\bar{k}$  en el rango de temperatura  $T_1 < T < T_2$  con la siguiente ecuación:

$$\bar{k} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT \quad (4.13)$$

## 4.1.2 Algunos métodos de estimación para conductividad térmica

### 4.1.2.1 Teoría cinética de Chapman-Enskog (conductividad de gases puros a baja presión)

La teoría cinética, que tiene aplicaciones para estimar diversas propiedades de los gases, se basa en el modelo de Lennard-Jones para el potencial intermolecular. Sin embargo, esta teoría toma en cuenta únicamente la energía cinética de traslación de la molécula, no incluye las contribuciones energéticas debidas a vibraciones y rotaciones, por lo que este método sólo se puede recomendar para **gases monoatómicos\***, como los incluidos en la Tabla 4.1.

La ecuación que se obtiene para la conductividad térmica es:

$$k = 0.08328 \frac{(T/M)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_k} \quad (4.14)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica en W/m·K,  $T$  es la temperatura en K,  $M$  es el peso molecular en g/mol,  $\sigma$  es el diámetro de colisión en Å (Tabla 4.1) y  $\Omega_k$  es la integral de colisión (adimensional).

**Tabla 4.1** Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades para estimación de conductividad térmica.

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\varepsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$\bar{V}_c$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)
He	4.003	2.551	10.22	5.19	2.27	57.4
Ne	20.183	2.820	32.8	44.4	27.6	41.6
Ar	39.948	3.542	93.3	150.8	48.7	74.9
Kr	83.800	3.655	178.9	209.4	55.0	91.2
Xe	131.300	4.047	231.0	289.7	58.4	118.4
Hg	200.61	2.969	750.0	1765	1510	42.7

La integral de colisión para conductividad térmica  $\Omega_k$  (Tabla 4.2) tiene el mismo valor numérico que la integral de colisión para viscosidad  $\Omega_\mu$ , y también se obtiene a partir de la temperatura adimensional:

$$T^* = \frac{\kappa T}{\varepsilon} \quad \text{o bien} \quad T^* = \frac{T}{\varepsilon / \kappa} \quad (4.15)$$

\* Para gases poliatómicos, es preferible usar un método que sí incluya esas contribuciones energéticas a través de la capacidad calorífica del gas, tal como el método de Chung, descrito más adelante.

**Tabla 4.2** Integral de colisión para conductividad térmica (Lennard-Jones).

$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$
0.30	2.8458	1.00	1.5925	1.70	1.2486	2.8	1.0591	4.2	0.9587	12	0.8026
0.35	2.6791	1.05	1.5533	1.75	1.2347	2.9	1.0489	4.3	0.9539	14	0.7844
0.40	2.5316	1.10	1.5173	1.80	1.2216	3.0	1.0394	4.4	0.9493	16	0.7690
0.45	2.4003	1.15	1.4843	1.85	1.2092	3.1	1.0304	4.5	0.9447	18	0.7556
0.50	2.2831	1.20	1.4539	1.90	1.1975	3.2	1.0220	4.6	0.9406	20	0.7439
0.55	2.1781	1.25	1.4259	1.95	1.1865	3.3	1.0141	4.7	0.9365	25	0.7196
0.60	2.0839	1.30	1.4000	2.0	1.1760	3.4	1.0066	4.8	0.9326	30	0.7003
0.65	1.9991	1.35	1.3760	2.1	1.1565	3.5	0.9995	4.9	0.9288	35	0.6844
0.70	1.9226	1.40	1.3538	2.2	1.1388	3.6	0.9927	5.0	0.9252	40	0.6710
0.75	1.8535	1.45	1.3331	2.3	1.1227	3.7	0.9864	6.0	0.8947	45	0.6593
0.80	1.7909	1.50	1.3139	2.4	1.1079	3.8	0.9803	7.0	0.8719	50	0.6491
0.85	1.7341	1.55	1.2959	2.5	1.0943	3.9	0.9745	8.0	0.8535	60	0.6317
0.90	1.6825	1.60	1.2791	2.6	1.0817	4.0	0.9690	9.0	0.8382	80	0.6053
0.95	1.6354	1.65	1.2633	2.7	1.0700	4.1	0.9637	10	0.8249	100	0.5855

Valores calculados con las correlaciones de Neufeld citadas en Poling (2000).

#### 4.1.2.2 Método de Stiel y Thodos (conductividad de gases puros a baja presión)

La conductividad térmica ha sido estudiada frecuentemente en forma adimensional, en el llamado factor de Eucken:

$$f \equiv \frac{kM'}{\mu c_V} \quad (4.16)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica en W/m·K,  $M'$  es el peso molecular en kg/mol,  $\mu$  es la viscosidad en Pa·s, y  $c_V$  es la capacidad calorífica a volumen constante en J/mol. La ecuación originalmente propuesta por Eucken se puede escribir como:

$$f = 1 + \frac{9/4}{c_V/R} \quad (4.17)$$

Stiel y Thodos han determinado una forma ligeramente modificada que concuerda mejor con los datos experimentales, aunque no es muy confiable para el caso de compuestos polares:

$$f = 1.15 + \frac{2.03}{c_V/R} \quad (4.18)$$

#### 4.1.2.3 Método de Chung (conductividad de gases puros a baja presión)

También se basa en una ecuación para el factor de Eucken:

$$f = \frac{3.75\Psi}{c_V/R} \quad (4.19)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica en  $\text{W/m}\cdot\text{K}$ ,  $M'$  es el peso molecular en  $\text{kg/mol}$ ,  $\mu$  es la viscosidad en  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ , y  $c_V$  es la capacidad calorífica a volumen constante en  $\text{J/mol}$ ,  $R$  es la constante universal de los gases en  $\text{J/mol}\cdot\text{K}$ , y  $\Psi$  es una función adimensional:

$$\Psi = 1 + \alpha \frac{0.215 + 0.28288\alpha - 1.061\beta + 0.26665\zeta}{0.6366 + \beta\zeta + 1.061\alpha\beta} \quad (4.20)$$

Los tres parámetros,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\zeta$  dependen a su vez de  $c_V$ ,  $R$ , el factor acéntrico  $\omega$  y la temperatura reducida  $T_r$ :

$$\alpha = \frac{c_V}{R} - \frac{3}{2} \quad (4.21)$$

$$\beta = 0.7862 - 0.7109\omega + 1.3168\omega^2 \quad (4.22)$$

$$\zeta = 2 + 10.5T_r^2 \quad (4.23)$$

 $\beta$  $\beta$ **EJEMPLO 4.1**

Estimar la conductividad térmica del monóxido de carbono gaseoso a  $377^\circ\text{C}$  y 1 atm, empleando el método de Chung. La temperatura crítica del CO es  $132.83\text{ K}$ , su factor acéntrico es  $0.045$  y su capacidad calorífica a presión constante es  $c_p = 35.526 - 0.03253T + 9.828 \times 10^{-5}T^2 - 1.083 \times 10^{-7}T^3 + 4.282 \times 10^{-11}T^4$  ( $T$  en K, y  $c_p$  en  $\text{J/mol}\cdot\text{K}$ ). A  $377^\circ\text{C}$ , la viscosidad del CO es  $3.01 \times 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

**SOLUCIÓN**

Primero se evalúa el  $c_p$ , empleando  $T = 650.15\text{ K}$  en el polinomio, para luego encontrar el  $c_V$ .

$$c_p = 35.526 - 0.03253T + 9.828 \times 10^{-5}T^2 - 1.083 \times 10^{-7}T^3 + 4.282 \times 10^{-11}T^4$$

$$c_p = 35.526 - 0.03253(650.15) + 9.828 \times 10^{-5}(650.15)^2 - 1.083 \times 10^{-7}(650.15)^3 + 4.282 \times 10^{-11}(650.15)^4$$

$$c_p = 33.807\text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

$$c_V = c_p - R$$

$$c_V = 33.807\text{ J/mol}\cdot\text{K} - 8.314\text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

$$c_V = 25.493\text{ J/mol}\cdot\text{K}$$

La temperatura reducida es:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{650.15\text{ K}}{132.83\text{ K}} = 4.8946$$

Se calculan los parámetros del método de Chung,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\zeta$ :

$$\alpha = \frac{c_V}{R} - \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \frac{25.493}{8.314} - \frac{3}{2}$$

$$\alpha = 1.5663$$

$$\beta = 0.7862 - 0.7109\omega + 1.3168\omega^2$$

$$\beta = 0.7862 - 0.7109(0.045) + 1.3168(0.045)^2$$

$$\beta = 0.75688$$

$$\zeta = 2 + 10.5T_r^2$$

$$\zeta = 2 + 10.5(4.8946)^2$$

$$\zeta = 253.55$$

Luego se sustituyen en la ecuación para  $\Psi$ :

$$\Psi = 1 + \alpha \frac{0.215 + 0.28288\alpha - 1.061\beta + 0.26665\zeta}{0.6366 + \beta\zeta + 1.061\alpha\beta}$$

$$\Psi = 1 + (1.5663) \frac{0.215 + 0.28288(1.5663) - 1.061(0.75688) + 0.26665(253.55)}{0.6366 + (0.75688)(253.55) + 1.061(1.5663)(0.75688)}$$

$$\Psi = 1.54525$$

Ahora se calcula el factor de Eucken:

$$f = \frac{3.75\Psi}{c_v / R}$$

$$f = \frac{3.75(1.54525)}{25.493 / 8.314}$$

$$f = 1.8898$$

Y finalmente se despeja  $k$  de la definición del factor de Eucken (el peso molecular del CO es  $M = 28.010$  g/mol, por lo que  $M' = 0.02801$  kg/mol):

$$f = \frac{kM'}{\mu c_v} \Rightarrow k = \frac{\mu c_v f}{M'}$$

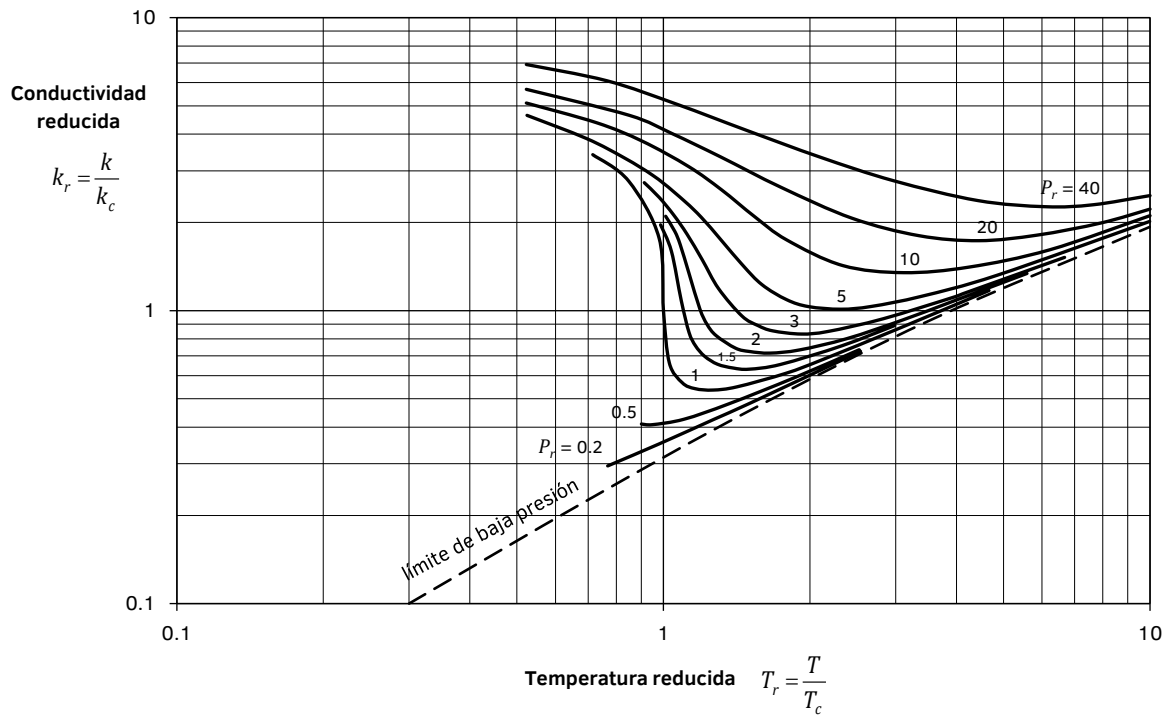
$$k = \frac{(3.01 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s})(25.493 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(1.8898)}{0.02801 \text{ kg/mol}}$$

$$k = 0.0518 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

#### 4.1.2.4 Diagrama de conductividad reducida (conductividad de gases puros a alta presión)

No existe un valor específico de presión a partir del cual se considere “alta”. Normalmente los métodos para gases a baja presión comienzan a mostrar desviaciones significativas a presiones de 10 atm o mayores.

Con base en el principio de estados correspondientes, es posible relacionar la conductividad térmica reducida  $k_r = k/k_c$  con la temperatura y presión reducidas (Figura 4.3).



**Figura 4.3** Diagrama de conductividad reducida.

Adaptado de Bird (2002) y White (1991).

Pocas veces se cuenta con valores experimentales de la conductividad térmica en el punto crítico; algunos se muestran en la Tabla 4.3.

**Tabla 4.3** Conductividad térmica en el punto crítico (W/m·K).

compuesto	$k_c$	compuesto	$k_c$	compuesto	$k_c$	compuesto	$k_c$
Ne	0.0332	Aire	0.0380	CO	0.0362	SO <sub>2</sub>	0.0413
Ar	0.0297	N <sub>2</sub>	0.0363	CO <sub>2</sub>	0.0511	Cl <sub>2</sub>	0.0406
Kr	0.0207	O <sub>2</sub>	0.0441	NO	0.0495	CH <sub>4</sub>	0.0662
Xe	0.0168	H <sub>2</sub> O	0.2380	N <sub>2</sub> O	0.0548	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0.0850

Valores recopilados de Bird (2002) e Incropera (2006).

Para compuestos no incluidos en la Tabla 4.3, si se conoce un dato de conductividad a otra temperatura y presión, entonces la conductividad crítica se puede estimar a partir de la gráfica con  $k_c = k/k_r$ , donde  $k_r$  se obtiene de la gráfica empleando los valores correspondientes de  $T_r$  y  $P_r$ .

**EJEMPLO 4.2**

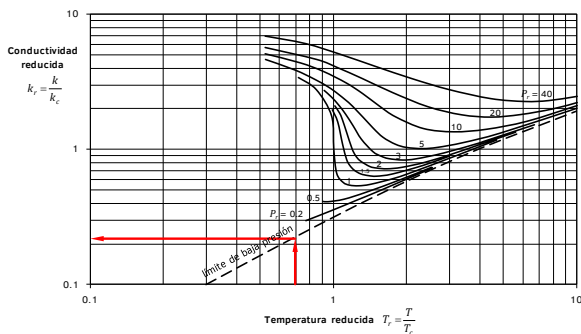
RESPUESTA: 0.0535 W/m·K

Se busca la conductividad a alta presión, por lo que se puede utilizar el diagrama de conductividad reducida. Sin embargo, no se conoce la conductividad crítica de la acetona, pero se puede estimar utilizando la información proporcionada a baja presión. Los datos del punto crítico de la acetona son  $T_c = 508.1$  K y  $P_c = 47.0$  bar (Poling, 2000).

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{353 \text{ K}}{508.1 \text{ K}} = 0.695$$

$$P_r = \frac{P}{P_c} = \frac{1 \text{ bar}}{47.0 \text{ bar}} = 0.021 \approx 0$$

Con estos datos se entra al diagrama de conductividad reducida:



y se obtiene un valor de  $k_r = 0.22$ . Este valor corresponde a las condiciones de baja presión para las cuales se sabe que  $k = 0.0157$  W/m·K. De la definición de  $k_r$  se despeja  $k_c$ :

$$k_r = \frac{k}{k_c} \Rightarrow k_c = \frac{k}{k_r}$$

$$k_c = \frac{0.0157 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{0.22} = 0.07136 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

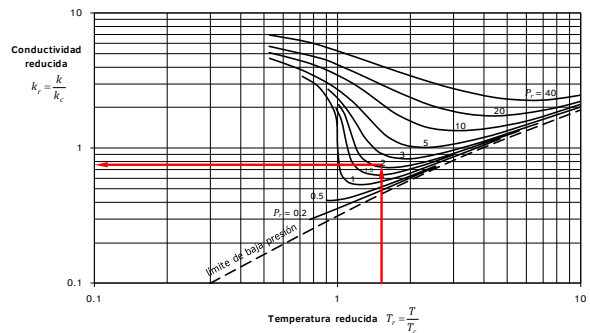
Este valor de  $k_c$  se supone que es una propiedad de esta sustancia (acetona).

A continuación, se procede a buscar el valor de  $k_r$  que corresponde a las condiciones buscadas, para lo que hay que calcular de nuevo la temperatura reducida y la presión reducida:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{773.15 \text{ K}}{508.1 \text{ K}} = 1.52$$

$$P_r = \frac{P}{P_c} = \frac{100 \text{ atm}}{47.0 \text{ bar}} \left| \frac{1.01325 \text{ bar}}{1 \text{ atm}} \right. = 2.156$$

Con estos datos, se entra nuevamente a la gráfica:



y se obtiene el valor de  $k_r = 0.75$  para las condiciones a alta presión. Finalmente se puede calcular el valor buscado de  $k$ :

$$k_r = \frac{k}{k_c} \Rightarrow k = k_r k_c$$

$$k = k_r k_c = (0.75)(0.07136 \text{ W/m} \cdot \text{K})$$

$$k = 0.0535 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

■

#### 4.1.2.5 Método de Wilke (conductividad de mezclas de gases a baja presión)

Este método es una extensión del método de Wilke para viscosidad de mezclas de gases a baja presión. Se requiere la fracción mol, la viscosidad y la conductividad térmica de los componentes puros a la temperatura de interés. Para una mezcla binaria, el método se expresa como:

$$k_m = \frac{y_1 k_1}{y_1 + y_2 \Phi_{12}} + \frac{y_2 k_2}{y_2 + y_1 \Phi_{21}} \quad (4.24)$$

y para una mezcla multicomponentes, se generaliza a:

$$k_m = \frac{\sum_{i=1}^n y_i k_i}{\sum_{j=1}^n y_j \Phi_{ij}} \quad (4.25)$$

$\Phi_{ij}$  es un parámetro de interacción que depende de las viscosidades de los componentes puros a baja presión, definido por la misma ecuación que en el caso de cálculos de viscosidad de mezclas:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2 \quad (4.26)$$

con la siguiente fórmula simplificada para el parámetro correspondiente  $\Phi_{ji}$ :

$$\Phi_{ji} = \frac{\mu_j M_i}{\mu_i M_j} \Phi_{ij} \quad (4.27)$$

De nuevo, cuando ambos subíndices son iguales,  $\Phi = 1$ .

#### EJEMPLO 4.3

Algunos diseños de lámparas de vapor de mercurio emplean cierta cantidad de argón como gas de relleno para favorecer el inicio de la descarga eléctrica. Estime la conductividad térmica de una mezcla de argón y vapor de mercurio a una temperatura de 400 °C y una presión total de 2 bar, si la fracción mol de argón es 5%.

RESPUESTA: 0.0111 W/m·K

#### SOLUCIÓN

Dado que el argón y el mercurio son gases monoatómicos, se puede emplear la teoría cinética de Chapman-Enskog para estimar la viscosidad y la conductividad térmica de los componentes puros.

Para el argón,  $M = 39.948 \text{ g/mol}$ ,  $\sigma = 3.542 \text{ \AA}$ ,  $\varepsilon / \kappa = 93.3 \text{ K}$ . Se calcula la temperatura adimensional:

$$T^* = \frac{T}{\varepsilon / \kappa} = \frac{673.15 \text{ K}}{93.3 \text{ K}} = 7.21$$

y con ella se obtiene la integral de colisión (que tiene el mismo valor para viscosidad y para conductividad térmica):

$$\Omega_{\mu} = \Omega_k = 0.8680$$

Se calcula la viscosidad y la conductividad del argón:

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{[(39.948)(673.15)]^{0.5}}{(3.542)^2 (0.8680)}$$

$$\mu = 4.02 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$k = 0.08328 \frac{(T/M)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

$$k = 0.08328 \frac{((673.15)/(39.948))^{0.5}}{(3.542)^2 (0.8680)}$$

$$k = 0.0314 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Se repiten los cálculos para el mercurio, usando  $M = 200.61$  g/mol,  $\sigma = 2.969 \text{ \AA}$ ,  $\varepsilon / \kappa = 750.0 \text{ K}$ . Se calcula la temperatura adimensional y la integral de colisión para el mercurio:

$$T^* = \frac{T}{\varepsilon / \kappa} = \frac{673.15 \text{ K}}{750.0 \text{ K}} = 0.8975$$

$$\Omega_{\mu} = \Omega_k = 1.6851$$

y se calcula la viscosidad y la conductividad del mercurio:

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{[(200.61)(673.15)]^{0.5}}{(2.969)^2 (1.6851)}$$

$$\mu = 6.60 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$k = 0.08328 \frac{(T/M)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

$$k = 0.08328 \frac{((673.15)/(200.61))^{0.5}}{(2.969)^2 (1.6851)}$$

$$k = 0.0103 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

A continuación, para aplicar el método de Wilke, se identifican los componentes por número, 1 = argón y 2 = mercurio, y se calculan los parámetro de interacción  $\Phi_{12}$  y  $\Phi_{21}$ :

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^{1/4} \right]^2$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{39.948}{200.61} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{4.02 \times 10^{-5}}{6.60 \times 10^{-5}} \right)^{1/2} \left( \frac{200.61}{39.948} \right)^{1/4} \right]^2$$

$$\Phi_{12} = 1.5180$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{M_2}{M_1} \Phi_{12}$$

$$\Phi_{21} = \left( \frac{6.60 \times 10^{-5}}{4.02 \times 10^{-5}} \right) \left( \frac{39.948}{200.61} \right) (1.5180)$$

$$\Phi_{21} = 0.4963$$

Finalmente se calcula la conductividad térmica buscada. Para una mezcla binaria, la fórmula del método de Wilke es:

$$k_m = \frac{y_1 k_1}{y_1 + y_2 \Phi_{12}} + \frac{y_2 k_2}{y_2 + y_1 \Phi_{21}}$$

Sustituyendo ( $y_1 = 0.05$ , dato del enunciado):

$$k_m = \frac{(0.05)(0.0314 \text{ W/m} \cdot \text{K})}{0.05 + (0.95)(1.5180)} + \frac{(0.95)(0.0103 \text{ W/m} \cdot \text{K})}{0.95 + (0.05)(0.4963)}$$

$$k_m = 0.0111 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

■

#### 4.1.2.6 Método del punto de ebullición de Sato y Riedel (conductividad de líquidos puros)

Para líquidos orgánicos a temperaturas por debajo del punto de ebullición, esta correlación da errores variables, aunque generalmente están por debajo del 15%. Este método es de exactitud limitada, pero tiene la ventaja de que sólo requiere información básica del compuesto.

$$k = \frac{1.11}{M^{1/2}} \left[ \frac{3 + 20(1 - T_r)^{2/3}}{3 + 20(1 - T_{br})^{2/3}} \right] \quad (4.28)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica en  $\text{W/m} \cdot \text{K}$ ,  $M$  es el peso molecular en g/mol,  $T_r$  es la temperatura reducida ( $T/T_c$ ) y  $T_{br}$  es la temperatura de ebullición reducida ( $T_b/T_c$ ).

**EJEMPLO 4.4**

Estimar la conductividad térmica del etanol líquido a 15 °C, empleando el método de Sato y Riedel. Calcular el error porcentual de la estimación, sabiendo que a esa temperatura el valor reportado es 0.174 W/m·K (Perry, 2004).

RESPUESTA: 0.194 W/m·K

**SOLUCIÓN**

Los datos que se requieren del etanol son el peso molecular  $M = 46.069$  g/mol, la temperatura del punto de ebullición normal  $T_b = 351.80$  K, y la temperatura crítica  $T_c = 513.92$  K (Poling, 2000). Entonces se calcula la temperatura reducida:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{288.15 \text{ K}}{513.92 \text{ K}} = 0.56069$$

y la temperatura de ebullición reducida:

$$T_{br} = \frac{T_b}{T_c} = \frac{351.80 \text{ K}}{513.92 \text{ K}} = 0.68454$$

Finalmente se sustituye en la fórmula del método de Sato y Riedel:

$$k = \frac{1.11}{M^{1/2}} \left[ \frac{3 + 20(1 - T_r)^{2/3}}{3 + 20(1 - T_{br})^{2/3}} \right]$$

$$k = \frac{1.11}{(46.069)^{1/2}} \left[ \frac{3 + 20(1 - 0.56069)^{2/3}}{3 + 20(1 - 0.68454)^{2/3}} \right]$$

$$k = 0.194 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

El error porcentual es:

$$\frac{0.194 - 0.174}{0.174} \times 100\% = 11.5\%$$

#### 4.1.2.7 Ecuación de Filippov (conductividad de mezclas de líquidos)

Esta ecuación sólo es aplicable para mezclas binarias y emplea la conductividad térmica de los líquidos puros y las fracciones peso:

$$k_m = w_1 k_1 + w_2 k_2 - 0.72 w_1 w_2 (k_2 - k_1) \quad (4.29)$$

Los componentes se asignan de tal forma que el componente 1 sea el de menor conductividad y el componente 2 sea el de mayor conductividad (es decir, se debe cumplir  $k_1 \leq k_2$ ). La constante 0.72 se puede reemplazar por un parámetro ajustable por regresión si se tienen datos experimentales.

**EJEMPLO 4.5**

Estimar la conductividad térmica de una mezcla líquida equimolar de benceno y tolueno a 35 °C. A esa temperatura, las conductividades de los compuestos puros son 0.488 y 0.4566 W/m·K, respectivamente.

**SOLUCIÓN**

Se puede emplear el método de Filippov, pero primero es necesario convertir la fracción mol a fracción peso. Tomando como base 1 mol total, se tiene 0.5 mol de benceno y 0.5 mol de tolueno.

$$\frac{0.5 \text{ mol benceno}}{\text{mol}} \left| \frac{78 \text{ g}}{\text{mol}} \right. = 39 \text{ g benceno}$$

$$\frac{0.5 \text{ mol tolueno}}{\text{mol}} \left| \frac{92 \text{ g}}{\text{mol}} \right. = 46 \text{ g tolueno}$$

$$w_{\text{benc}} = \frac{39}{39 + 46} = 0.4588$$

$$w_{\text{tol}} = \frac{46}{39 + 46} = 0.5412$$

Luego, se identifica cuál compuesto tiene el menor valor de conductividad térmica, en este caso el tolueno, para asignarle el número 1, y el benceno será el compuesto 2. Por lo tanto, los datos necesarios para la sustitución son:

$$k_1 = 0.4566 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad w_1 = 0.5412$$

$$k_2 = 0.488 \text{ W/m} \cdot \text{K} \quad w_2 = 0.4588$$

Finalmente, se sustituye en la ecuación del método de Fillipov:

$$k_m = w_1 k_1 + w_2 k_2 - 0.72 w_1 w_2 (k_2 - k_1)$$

$$k_m = (0.5412)(0.4566) + (0.4588)(0.488) - 0.72(0.5412)(0.4588)(0.488 - 0.4566)$$

$$k_m = 0.4654 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

■

#### 4.1.2.8 Método de Li (conductividad de mezclas de líquidos)

Este método permite estimar la conductividad de una mezcla líquida multicomponente a partir de la conductividad térmica de los componentes puros:

$$k_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j k_{ij}$$

donde  $k_{ij}$  es la media armónica de las conductividades térmicas de los componentes, tomados de par en par:

$$k_{ij} = 2(k_i^{-1} + k_j^{-1})^{-1} \quad k_{ii} = k_i$$

y las  $\alpha$  son parámetros adimensionales de interacción dados por:

$$\alpha_i = \frac{x_i \tilde{V}_i}{\sum_{j=1}^n x_j \tilde{V}_j}$$

donde  $\tilde{V}$  es el volumen molar ( $\text{cm}^3/\text{mol}$ ) del líquido puro. Si no se dispone de los valores de  $\tilde{V}$  a la temperatura de interés, puede emplearse los volúmenes molares en el punto de ebullición ( $\tilde{V}_b$ ). Para sistemas que no incluyen el agua, se puede emplear el volumen molar crítico  $V_c$  ( $\text{cm}^3/\text{mol}$ ) en vez de  $\tilde{V}$  sin afectar el resultado significativamente.

#### 4.1.2.9 Ecuación de Maxwell (conductividad de sólidos compuestos)

En el caso de un sólido compuesto (compósito), se puede considerar que el material tiene una conductividad térmica efectiva  $k_{ef}$  que depende de las conductividades de los componentes. Maxwell fue el primero en analizar la conducción de calor en medios compuestos, cuando consideró un material formado por esferas de conductividad  $k_1$  dispersas en una fase sólida continua de conductividad  $k_0$ . Para una fracción volumen  $\phi$  pequeña de la fase dispersa:

$$\frac{k_{ef}}{k_0} = 1 + \frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi} \quad (4.30)$$

**EJEMPLO 4.6**

Considérese un material compuesto formado por microesferas de vidrio de 100  $\mu\text{m}$  de diámetro dispersas en una matriz de polipropileno. Si la conductividad térmica del material compuesto es 0.364 W/m·K, y la conductividad térmica del vidrio y del polipropileno son 1.1 y 0.25 W/m·K, respectivamente, estimar la fracción volumen de esferas, y cuántas esferas hay en 1  $\text{mm}^3$  del material compuesto.

**SOLUCIÓN**

Se comienza con la ecuación de Maxwell para sólidos compuestos:

$$\frac{k_{ef}}{k_0} = 1 + \frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi}$$

donde  $k_{ef} = 0.364$  W/m·K es la conductividad térmica efectiva del material compuesto,  $k_0 = 0.25$  W/m·K es la conductividad de la fase continua (polipropileno),  $k_1 = 1.1$  W/m·K es la conductividad de la fase dispersa (vidrio) y  $\phi$  es la fracción volumen buscada. Así, despejando  $\phi$ :

$$\frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi} = \frac{k_{ef}}{k_0} - 1$$

$$\frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi} = \frac{k_{ef} - k_0}{k_0}$$

$$\frac{k_0}{k_{ef} - k_0} = \frac{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi}{3\phi}$$

$$\frac{3\phi k_0}{k_{ef} - k_0} = \left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi$$

$$\frac{3\phi k_0}{k_{ef} - k_0} + \phi = \frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}$$

$$\left(\frac{3k_0}{k_{ef} - k_0} + 1\right)\phi = \frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}$$

$$\left(\frac{3k_0 + k_{ef} - k_0}{k_{ef} - k_0}\right)\phi = \frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}$$

$$\left(\frac{2k_0 + k_{ef}}{k_{ef} - k_0}\right)\phi = \frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}$$

$$\phi = \left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right)\left(\frac{k_{ef} - k_0}{2k_0 + k_{ef}}\right)$$

$$\phi = \left(\frac{k_{ef} - k_0}{k_1 - k_0}\right)\left(\frac{2k_0 + k_1}{2k_0 + k_{ef}}\right)$$

Sustituyendo valores:

$$\phi = \left(\frac{0.364 - 0.25}{1.1 - 0.25}\right)\left(\frac{2 \times 0.25 + 1.1}{2 \times 0.25 + 0.364}\right)$$

$$\phi = 0.24837$$

Para encontrar el número de esferas en 1  $\text{mm}^3$  del material, primero se reconoce que por la fracción volumen  $\phi$ , el volumen que ocupan las esferas es 0.24837  $\text{mm}^3$ . Se calcula primero el volumen de una esfera, si su diámetro es 100  $\mu\text{m} = 0.1$  mm, entonces su radio es 0.05 mm, y su volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0.05 \text{ mm})^3$$

$$V = 5.2359 \times 10^{-4} \text{ mm}^3$$

Así, el número de esferas se encuentra dividiendo el volumen total de las esferas entre el volumen de una esfera:

$$\frac{0.24837 \text{ mm}^3}{5.2359 \times 10^{-4} \text{ mm}^3} = 474.4$$

Por lo tanto, hay 474.4 esferas en 1  $\text{mm}^3$  del material compuesto. ■

**4.1.2.10 Conductividad térmica de productos alimenticios**

Es importante mencionar que algunos productos alimenticios son anisotrópicos, por lo que la conductividad térmica puede variar dependiendo de la dirección de la transferencia de calor. Se han propuesto varios modelos para estimar la conductividad térmica de un alimento a partir de la conductividad térmica y la fracción volumen de los componentes

individuales. Dos modelos populares, propuestos por analogía con los circuitos eléctricos, son el modelo paralelo y el modelo perpendicular.

$$k = \sum \phi_i k_i \quad (\text{modelo paralelo}) \quad (4.31)$$

$$k = \frac{1}{\sum (\phi_i / k_i)} \quad (\text{modelo perpendicular}) \quad (4.32)$$

Habitualmente, la conductividad térmica real de un alimento quedará entre los extremos dados por estos dos modelos, aunque el modelo paralelo es usado con mayor frecuencia.

La conductividad térmica de los componentes individuales está dada por las siguientes ecuaciones:

$$k_{\text{agua}} = 0.57109 + 1.7625 \times 10^{-3}T - 6.7306 \times 10^{-6}T^2 \quad (4.33)$$

$$k_{\text{hielo}} = 2.2196 - 6.2489 \times 10^{-3}T + 1.0154 \times 10^{-4}T^2 \quad (4.34)$$

$$k_{\text{proteína}} = 0.1788 + 1.1959 \times 10^{-3}T - 2.7178 \times 10^{-6}T^2 \quad (4.35)$$

$$k_{\text{grasa}} = 0.1807 - 2.7604 \times 10^{-4}T - 1.7749 \times 10^{-7}T^2 \quad (4.36)$$

$$k_{\text{carbohidr}} = 0.2014 + 1.3874 \times 10^{-3}T - 4.3312 \times 10^{-6}T^2 \quad (4.37)$$

$$k_{\text{fibra}} = 0.1833 + 1.2497 \times 10^{-3}T - 3.1683 \times 10^{-6}T^2 \quad (4.38)$$

$$k_{\text{ceniza}} = 0.3296 + 1.401 \times 10^{-3}T - 2.9069 \times 10^{-6}T^2 \quad (4.39)$$

donde la temperatura debe ser en grados Celsius y la conductividad térmica será en W/m·K.

La fracción volumen de cada componente se estima a partir de la fracción masa y la densidad individual de cada componente:

$$\phi_i = \frac{w_i \rho}{\rho_i} \quad (4.40)$$

donde la densidad del alimento compuesto está dada por:

$$\rho = \frac{1}{\sum (w_i / \rho_i)} \quad (4.41)$$

y las densidades  $\rho_i$  de los componentes están dadas por:

$$\rho_{\text{agua}} = 997.18 + 3.1439 \times 10^{-3}T - 3.7574 \times 10^{-3}T^2 \quad (4.42)$$

$$\rho_{\text{hielo}} = 916.89 - 0.13071T \quad (4.43)$$

$$\rho_{\text{proteína}} = 1329.9 - 0.51814T \quad (4.44)$$

$$\rho_{\text{grasa}} = 925.59 - 0.41757T \quad (4.45)$$

$$\rho_{\text{carbohidr}} = 1599.1 - 0.31047T \quad (4.46)$$

$$\rho_{\text{fibra}} = 1311.5 - 0.36589T \quad (4.47)$$

$$\rho_{\text{ceniza}} = 2423.8 - 0.28063T \quad (4.48)$$

donde nuevamente la temperatura debe ser en °C y las densidades están dadas en kg/m<sup>3</sup>.

Para alimentos congelados, sólo una parte del agua se encuentra presente como hielo, mientras que el resto permanece en fase líquida. Para estimar la fracción masa de hielo se recomienda la ecuación empírica propuesta por Tchigeov (1979):

$$w_{\text{hielo}} = \frac{1.105w_{\text{agua, inicial}}}{1 + \frac{0.7138}{\ln(T_{f0} - T + 1)}} \quad (4.49)$$

donde  $w_{\text{agua, inicial}}$  es la fracción masa de agua antes del congelamiento (es decir, la fracción masa total del agua) y  $T_{f0}$  es la temperatura a la cual el alimento comienza a congelarse. También aquí las temperaturas deben ser en °C. Finalmente, la fracción masa de agua que permanece sin congelar se obtiene por diferencia:

$$w_{\text{agua}} = w_{\text{agua, inicial}} - w_{\text{hielo}} \quad (4.50)$$

#### EJEMPLO 4.7

Genuino salmón del Pacífico Noroeste (específicamente, de Oregón) se va a conservar congelado a  $-40$  °C para su eventual consumo en finos restaurantes en todo el mundo. La composición del salmón (base peso) es 75.62% agua, 19.76% proteína, 3.41% grasa y 1.21% cenizas, y su temperatura de congelamiento inicial es  $-2.2$  °C. Para el salmón congelado a  $-40$  °C, calcular el porcentaje de hielo y la conductividad térmica (empleando el modelo paralelo).

RESPUESTA: 69.9% hielo, 2.044 W/m·K

#### SOLUCIÓN

La temperatura de congelamiento inicial es  $T_{f0} = -2.2$  °C y la temperatura a la que va a estar congelado es  $T = -40$  °C. Los datos de la composición del salmón, en fracción masa, se listan a continuación. Nótese que la fracción masa de agua es la inicial, antes de ser congelado.

$$w_{\text{agua, inicial}} = 0.7562$$

$$w_{\text{proteína}} = 0.1976$$

$$w_{\text{grasa}} = 0.0341$$

$$w_{\text{ceniza}} = 0.0121$$

Primero hay que calcular la fracción masa del hielo:

$$w_{\text{hielo}} = \frac{1.105w_{\text{agua, inicial}}}{1 + \frac{0.7138}{\ln(T_{f0} - T + 1)}}$$

$$w_{\text{hielo}} = \frac{1.105(0.7562)}{1 + \frac{0.7138}{\ln(-2.2 - (-40) + 1)}}$$

$$w_{\text{hielo}} = 0.6992$$

y encontrar la fracción masa de agua no congelada por diferencia:

$$w_{\text{agua}} = w_{\text{agua, inicial}} - w_{\text{hielo}}$$

$$w_{\text{agua}} = 0.7562 - 0.6992$$

$$w_{\text{agua}} = 0.0570$$

Luego se calcula la densidad de cada componente, a la temperatura a la que estará congelado el salmón. Nótese que no se necesitan los datos de carbohidratos y fibra porque el salmón no contiene.

$$\rho_{\text{agua}} = 997.18 + 3.1439 \times 10^{-3}T - 3.7574 \times 10^{-3}T^2$$

$$\rho_{\text{agua}} = 997.18 + 3.1439 \times 10^{-3}(-40) - 3.7574 \times 10^{-3}(-40)^2$$

$$\rho_{\text{agua}} = 991.0 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{hielo}} = 916.89 - 0.13071T$$

$$\rho_{\text{hielo}} = 916.89 - 0.13071(-40)$$

$$\rho_{\text{hielo}} = 922.1 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{proteína}} = 1329.9 - 0.51814T$$

$$\rho_{\text{proteína}} = 1329.9 - 0.51814(-40)$$

$$\rho_{\text{proteína}} = 1350.6 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{grasa}} = 925.59 - 0.41757T$$

$$\rho_{\text{grasa}} = 925.59 - 0.41757(-40)$$

$$\rho_{\text{grasa}} = 942.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{ceniza}} = 2423.8 - 0.28063T$$

$$\rho_{\text{ceniza}} = 2423.8 - 0.28063(-40)$$

$$\rho_{\text{ceniza}} = 2435.0 \text{ kg/m}^3$$

A continuación se calcula la densidad global del alimento, donde el denominador es la suma de la fracción masa de cada componente dividida entre la densidad correspondiente:

$$\rho = \frac{1}{\sum (w_i / \rho_i)}$$

$$\rho = \frac{1}{\frac{0.0570}{991.0} + \frac{0.6992}{922.1} + \frac{0.1976}{1350.6} + \frac{0.0341}{942.2} + \frac{0.0121}{2435.0}}$$

$$\rho = 996.8 \text{ kg/m}^3$$

Ahora se calcula la fracción volumen de cada componente:

$$\phi_i = \frac{w_i \rho}{\rho_i}$$

$$\phi_{\text{agua}} = \frac{(0.0570)(996.8)}{991.0} = 0.0573$$

$$\phi_{\text{hielo}} = \frac{(0.6992)(996.8)}{922.1} = 0.7558$$

$$\phi_{\text{proteína}} = \frac{(0.1976)(996.8)}{1350.6} = 0.1458$$

$$\phi_{\text{grasa}} = \frac{(0.0341)(996.8)}{942.2} = 0.0361$$

$$\phi_{\text{ceniza}} = \frac{(0.0121)(996.8)}{2435.0} = 0.0050$$

A manera de verificación, se puede comprobar fácilmente que la suma de las fracciones volumen es igual a uno

Ahora se calcula la conductividad térmica de cada componente, a la temperatura que estará congelado el salmón (la temperatura debe ser también en °C):

$$k_{\text{agua}} = 0.57109 + 1.7625 \times 10^{-3}T - 6.7306 \times 10^{-6}T^2$$

$$k_{\text{agua}} = 0.57109 + 1.7625 \times 10^{-3}(-40) - 6.7306 \times 10^{-6}(-40)^2$$

$$k_{\text{agua}} = 0.4898 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$k_{\text{hielo}} = 2.2196 - 6.2489 \times 10^{-3}T + 1.0154 \times 10^{-4}T^2$$

$$k_{\text{hielo}} = 2.2196 - 6.2489 \times 10^{-3}(-40) + 1.0154 \times 10^{-4}(-40)^2$$

$$k_{\text{hielo}} = 2.6320 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$k_{\text{proteína}} = 0.1788 + 1.1959 \times 10^{-3}T - 2.7178 \times 10^{-6}T^2$$

$$k_{\text{proteína}} = 0.1788 + 1.1959 \times 10^{-3}(-40) - 2.7178 \times 10^{-6}(-40)^2$$

$$k_{\text{proteína}} = 0.1266 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$k_{\text{grasa}} = 0.1807 - 2.7604 \times 10^{-4}T - 1.7749 \times 10^{-7}T^2$$

$$k_{\text{grasa}} = 0.1807 - 2.7604 \times 10^{-4}(-40) - 1.7749 \times 10^{-7}(-40)^2$$

$$k_{\text{grasa}} = 0.1915 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

$$k_{\text{ceniza}} = 0.3296 + 1.401 \times 10^{-3}T - 2.9069 \times 10^{-6}T^2$$

$$k_{\text{ceniza}} = 0.3296 + 1.401 \times 10^{-3}(-40) - 2.9069 \times 10^{-6}(-40)^2$$

$$k_{\text{ceniza}} = 0.2689 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

Finalmente, se calcula la conductividad térmica para el salmón congelado, empleando el modelo paralelo:

$$k = \sum \phi_i k_i$$

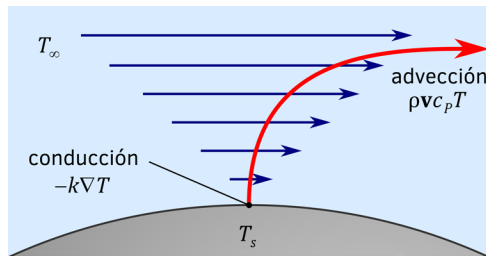
$$k = (0.0573)(0.4898) + (0.7558)(2.6320) + (0.1458)(0.1266) + (0.0361)(0.1915) + (0.0050)(0.2689)$$

$$k = 2.044 \text{ W/m} \cdot \text{K}$$

## 4.2 Convección

La convección es en realidad un mecanismo combinado que involucra la conducción de calor cerca de la superficie de un objeto, y la advección del calor mediante el fluido que está más lejos del objeto. Para aclarar este concepto,

considérese un objeto estacionario que tiene una temperatura superficial uniforme  $T_s$ , rodeado de un fluido en movimiento que (suficientemente lejos del objeto) tiene una temperatura  $T_\infty$  (Figura 4.4).



**Figura 4.4** La convección como fenómeno combinado de conducción y advección.

Debido a la condición de no deslizamiento, la velocidad del fluido en contacto con la superficie del objeto debe ser cero. Justo en la superficie del sólido, sus moléculas tienen cierta cantidad de energía cinética (vibrando y oscilando alrededor de sus posiciones de equilibrio) que depende de su temperatura. Estas moléculas interactúan con las moléculas de la primera capa de fluido, que está en reposo, y les transfieren parte de su energía por conducción (de acuerdo a la ley de Fourier,  $-k\nabla T$ ).

Conforme el calor sigue pasando por conducción de capa en capa en el fluido, eventualmente va alcanzando capas que sí están en movimiento. Entonces, el fluido “acarrea” consigo la energía transferida, mediante advección. Este transporte advectivo es proporcional a la densidad de flujo másico del fluido ( $\rho\mathbf{v}$ ) y proporcional a su energía térmica por unidad de masa ( $c_p T$ ).

Macroscópicamente, se observa que el calor pasó del objeto al fluido y se analiza la convección como un solo fenómeno, aunque en realidad sea un mecanismo combinado, resultado de la conducción y la advección actuando en conjunto.

#### 4.2.1 Ley de Newton del enfriamiento

Sir Isaac Newton estudió, entre sus múltiples intereses, el comportamiento de la temperatura de los objetos. Es bien sabido que un objeto caliente, colocado en una habitación a menor temperatura, se enfría hasta alcanzar la misma temperatura de la habitación. Newton\* determinó que la rapidez con la que disminuye la temperatura del objeto es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio ambiente:

$$-\frac{dT}{dt} \propto (T - T_\infty) \quad (4.51)$$

Tradicionalmente se habla de la ley de Newton *del enfriamiento* por razones históricas, pero igual aplica a situaciones en las que el objeto está a menor temperatura que su medio ambiente y su temperatura aumenta por calentamiento.

Hoy en día, sabemos que ese cambio en la temperatura del objeto se debe a la transferencia de calor por convección, y la ley de Newton del enfriamiento se expresa en términos de una densidad de calor por convección:

$$q_{conv} \propto (T - T_\infty) \quad (4.52)$$

\* Newton publicó su deducción de forma anónima en 1701, no en esta forma matemática, sino expresando que “el exceso de grados de calor está en progresión geométrica cuando el tiempo está en progresión aritmética”. La ecuación diferencial que se emplea aquí es equivalente a esa afirmación.

Se introduce ahora una constante de proporcionalidad:

$$q_{conv} = h(T - T_{\infty}) \quad (4.53)$$

Esta constante de proporcionalidad se denomina “coeficiente de transferencia de calor por convección”, o “coeficiente de película”. Entonces, se puede enunciar la ley de Newton del enfriamiento de la siguiente forma:

- ★ **Ley de Newton del enfriamiento:** La densidad de flujo de calor por convección es directamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el fluido circundante.

#### 4.2.2 Coeficiente de transferencia de calor por convección

El coeficiente de transferencia de calor por convección, también llamado coeficiente de película o coeficiente convectivo, engloba todos los factores que influyen en la cantidad de calor transferido, salvo la diferencia de temperatura entre el objeto y el fluido circundante. En el Sistema Internacional, la unidad del coeficiente de transferencia de calor es  $W/m^2 \cdot K$ . Este coeficiente depende básicamente de tres factores:

- ★ **Condiciones de flujo:** En primera instancia, si la convección es libre o forzada, si el flujo es laminar o turbulento, y cuál es la velocidad del fluido.
- ★ **Propiedades del fluido:** Incluyendo su densidad, viscosidad, capacidad calorífica y conductividad térmica. Aunque, por definición, el coeficiente de transferencia de calor no depende de la temperatura, todas estas propiedades sí pueden variar dependiendo de la temperatura.
- ★ **Geometría del sistema:** Generalmente se habla de flujo interno cuando el fluido está confinado por superficies sólidas, y de flujo externo cuando el fluido se extiende de forma ilimitada alrededor del objeto. La forma del objeto y la rugosidad de su superficie influyen también en el movimiento del fluido, y por lo tanto en la transferencia de calor por convección.

Algunos valores típicos del coeficiente de transferencia de calor por convección se presentan en la Tabla 4.4.

**Tabla 4.4** Valores típicos del coeficiente de transferencia de calor.

Fluido de transferencia de calor	Rango de típico de $h$ ( $W/m^2 \cdot K$ )
Aire	1 – 50
Vapor (sobrecalentamiento)	30 – 100
Aceites	30 – 100
Agua	30 – 20,000
Vapores orgánicos en condensación	1,000 – 2,000
Agua en ebullición	1,700 – 50,000
Vapor (condensación en película)	6,000 – 20,000
Vapor (condensación en gotas)	30,000 – 100,000

Adaptado de McCabe (1991)

#### 4.2.3 Convección libre y convección forzada

Siempre que exista convección debe existir un fluido en movimiento. La distinción entre la convección libre (o natural) y la convección forzada es qué origina el movimiento del fluido. Considérese por ejemplo un objeto caliente en una habitación llena de aire frío, donde no circulen corrientes de aire ni haya otra causa de movimiento. Como se describió

previamente, el aire en las capas adyacentes al objeto se calentará por conducción. De acuerdo a la ley de gas ideal, al aumentar su temperatura (a presión constante) debe aumentar su volumen. Al dilatarse, disminuye su densidad, y por el principio de Arquímedes tiende a elevarse (flotación). Este aire caliente en movimiento es remplazado por más aire frío del resto de la habitación.

Nótese que en este ejemplo, *el movimiento del fluido fue causado por la transferencia de calor*. Ésta es la característica principal de la convección natural. Cuando el objeto se haya enfriado a la misma temperatura que el aire de la habitación, no habrá diferencias de densidad que causen el movimiento, y el aire regresará a su condición de reposo.

En contraste, en la convección forzada existe un *agente externo* que pone en movimiento al fluido, independientemente de la transferencia de calor. En el ejemplo, si hay una corriente de aire debido a una ventana abierta o a un ventilador, el aire puede seguirse moviendo incluso si la temperatura del objeto y del aire circundante son iguales.

#### 4.2.4 Correlaciones para la estimación del coeficiente de transferencia de calor por convección

Son pocos los casos en los que el coeficiente de transferencia de calor por convección se puede estimar con base en un análisis matemático riguroso. La mayoría de las veces, su estimación depende de *correlaciones empíricas* deducidas a partir de datos experimentales. Algunas de esas correlaciones son dimensionales (en las que hay que sustituir valores en ciertas unidades especificadas y el resultado estará en las unidades indicadas), pero la mayoría de las correlaciones se han deducido empleando grupos adimensionales para los cuales únicamente hay que cuidar que la cancelación de unidades sea correcta.

En el caso de la convección forzada, el caso más frecuente de correlación es para estimar el número de Nusselt, en función del número de Reynolds y del número de Prandtl:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}) \quad (\text{convección forzada}) \quad (4.54)$$

mientras que para la convección libre, el número de Nusselt se estima en función del número de Grashof y del número de Prandtl (recordando que en convección libre, la velocidad del fluido suele ser cero, por lo que  $\text{Re} = 0$  no serviría para evaluar las condiciones de flujo):

$$\text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr}) \quad (\text{convección libre}) \quad (4.55)$$

También es frecuente utilizar en convección libre el número de Rayleigh,  $\text{Ra}$ , que no es más que el producto del número de Grashof por el número de Prandtl:

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} \quad (4.56)$$

Una vez estimado el valor del número de Nusselt, el coeficiente de transferencia de calor por convección se obtiene de la definición de dicho grupo adimensional:

$$\text{Nu} = \frac{h\ell}{k} \quad (4.57)$$

donde  $\ell$  es una longitud característica que depende de la geometría analizada. Esta longitud característica suele ser la misma en el número de Reynolds (o Grashof) y en el número de Nusselt.

Las Tablas 4.5 a 4.7 presentan diversas correlaciones para convección forzada y para convección libre. Excepto donde se indica lo contrario, todas las propiedades del fluido deben evaluarse a la temperatura promedio de película,  $T_f = (T_w + T_\infty) / 2$ , donde  $T_w$  es la temperatura de la superficie (del inglés, *wall*) y  $T_\infty$  es la temperatura del fluido lejos del objeto (en principio, *infinitamente lejos*). También excepto donde se indica, se supone que toda la superficie del objeto está a la misma temperatura uniforme  $T_w$ .

**Tabla 4.5** Algunas correlaciones para convección forzada en flujo externo.

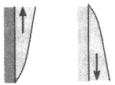
GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES (0.5 < Pr < 50 excepto si se indica otro intervalo)																	
superficie plana, flujo paralelo	$Nu_x = 0.332Re_x^{1/2}Pr^{1/3}$ (local)	capa laminar, $Re_x < 5 \times 10^5$ ; espesor de capas límite: hidrodinámica $\delta = 5xRe_x^{-1/2}$ , térmica $\delta_T = \delta Pr^{-1/3}$																	
	$\bar{Nu}_L = 0.664Re_L^{1/2}Pr^{1/3}$ (promedio)																		
	$Nu_x = 0.565Pe_x^{1/2}$ (local)	capa laminar, metal líquido, $Pe_x > 100$ , $Pr < 0.05$																	
	$Nu_x = 0.0296Re_x^{4/5}Pr^{1/3}$ (local)	capa turbulenta, $5 \times 10^5 < Re_x < 10^8$ ; espesor de la capa límite $\delta = 0.37xRe_x^{-1/5}$ (hidrodinámica y térmica)																	
	$\bar{Nu}_L = (0.037Re_L^{4/5} - 871)Pr^{1/3}$	capa laminar y turbulenta, $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$																	
	$Nu_x = \frac{0.3387Re_x^{1/2}Pr^{1/3}}{[1 + (0.0468 / Pr)^{2/3}]^{1/4}}$ (local)	$Pe_x > 100$ , cualquier valor de Pr																	
	$Nu_x = 0.453Re_x^{1/2}Pr^{1/3}$ (local)	capa laminar, flujo de calor en pared $q_w$ uniforme, $Re_x < 5 \times 10^5$																	
	$Nu_x = 0.0308Re_x^{4/5}Pr^{1/3}$ (local)	capa turbulenta, flujo de calor en pared $q_w$ uniforme, $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$																	
superficie plana, flujo perpendicular	$\bar{Nu}_W = 0.228Re_W^{0.731}Pr^{1/3}$	$4000 < Re_W < 15000$ , la longitud $L$ se asume mucho mayor que el ancho $W$																	
cilindro perpendicular al flujo (en flujo cruzado)	$\bar{Nu}_D = (0.473 + 0.528Re_D^{1/2})Pr^{1/3}$	$Re_D < 500$ , $Pr > 0.5$																	
	$\bar{Nu}_D = (0.506Re_D^{1/2} + 0.00141Re_D)Pr^{1/3}$	$Re_D > 500$ , $Pr > 0.5$																	
	$\bar{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{1/3}$	$0.4 < Re_D < 4 \times 10^5$ , $Pr > 0.5$																	
	<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>Re_D</math></th> <th><math>C</math></th> <th><math>m</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.4 - 4</td> <td>0.989</td> <td>0.330</td> </tr> <tr> <td>4 - 40</td> <td>0.911</td> <td>0.385</td> </tr> <tr> <td>40 - 4,000</td> <td>0.683</td> <td>0.466</td> </tr> <tr> <td>4,000 - 40,000</td> <td>0.193</td> <td>0.618</td> </tr> <tr> <td>40,000 - 400,000</td> <td>0.027</td> <td>0.805</td> </tr> </tbody> </table>		$Re_D$	$C$	$m$	0.4 - 4	0.989	0.330	4 - 40	0.911	0.385	40 - 4,000	0.683	0.466	4,000 - 40,000	0.193	0.618	40,000 - 400,000	0.027
$Re_D$	$C$		$m$																
0.4 - 4	0.989		0.330																
4 - 40	0.911		0.385																
40 - 4,000	0.683	0.466																	
4,000 - 40,000	0.193	0.618																	
40,000 - 400,000	0.027	0.805																	
esfera	$\bar{Nu}_D = (2.2 + 0.48Re_D^{1/2})Pr$	sólo para gases, $1 < Re_D < 25$																	
	$\bar{Nu}_D = 0.37Re_D^{0.6}Pr^{1/3}$	sólo para gases, $20 < Re_D < 1.5 \times 10^5$																	
	$\bar{Nu}_D = 2 + 0.6Re_D^{1/2}Pr^{1/3}$	$1 < Re_D < 7 \times 10^4$																	
	$\bar{Nu}_D = 2 + (0.4Re_D^{1/2} + 0.06Re_D^{2/3})Pr^{0.4} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{1/4}$	todas las propiedades evaluadas @ $T_\infty$ , excepto $\mu_w$ que es evaluada @ $T_w$ , $3.5 < Re_D < 8 \times 10^4$ , $0.7 < Pr < 380$ , $1 < (\mu / \mu_w) < 3.2$																	

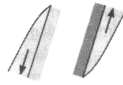

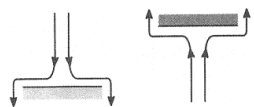


**Tabla 4.6** Algunas correlaciones para convección forzada en flujo interno.

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES
flujo dentro de tubería circular	$Nu_D = 3.66$ (local)	laminar, completamente desarrollado, $T_w$ uniforme, $Re_D < 2100$ , $Pr > 0.5$
	$Nu_D = 4.36$ (local)	laminar, completamente desarrollado, $q_w$ uniforme, $Re_D < 2100$ , $Pr > 0.5$

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES
	$\overline{Nu}_D = 1.86 \left( \frac{Re_D \cdot Pr}{L/D} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	laminar, longitud de entrada combinada, $T_w$ uniforme, $0.5 < 0.5 < Pr < 16700$ , $0.0044 < (\mu / \mu_w) < 9.75$
	$\overline{Nu}_D = 3.66 + \frac{0.0668(D/L)Re_D \cdot Pr}{1 + 0.04[(D/L)Re_D \cdot Pr]^{2/3}}$	laminar, longitud de entrada térmica ( $Pr \gg 1$ o una longitud inicial no calentada), $T_w$ uniforme
	$\overline{Nu}_D = 0.116(Re_D^{2/3} - 125)Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{2/3} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	régimen de transición, $2100 < Re_D < 10^4$
	$\overline{Nu}_D = 0.023Re_D^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	turbulento, $Re_D > 10^4$ , $0.5 < Pr < 700$
	$Nu_D = 5.0 + 0.025(Re_D \cdot Pr)^{0.8}$ (local)	metales líquidos, turbulento, completamente desarrollado, $T_w$ uniforme, $100 < Pe_D < 10000$
	$Nu_D = 4.82 + 0.0185(Re_D \cdot Pr)^{0.827}$ (local)	metales líquidos, turbulento, completamente desarrollado, $q_w$ uniforme, $100 < Pe_D < 10000$
	$h = \frac{3.52v^{0.8}}{D^{0.2}}$	turbulento, aproximado para aire (1 atm), $h$ [W/m <sup>2</sup> ·K], $v$ [m/s], $D$ [m]
	$h = (1429 + 21.14T) \frac{v^{0.8}}{D^{0.2}}$	turbulento, aproximado para agua (5 °C - 104 °C), $h$ [W/m <sup>2</sup> ·K], $T$ [°C], $v$ [m/s], $D$ [m]
flujo dentro de tubería con sección transversal rectangular $a \times b$	$\overline{Nu}_{D_H} = 0.0175Re_{D_H}^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	turbulento, $Re_{D_H} > 10^4$ , $0.6 < Pr < 700$ diámetro hidráulico $D_H = 2ab / (a + b)$
flujo en el espacio anular entre dos tuberías concéntricas $D_e$ = diámetro externo $D_i$ = diámetro interno	a la pared externa: $\overline{Nu}_{D_H} = 0.023Re_{D_H}^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D_H}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$ a la pared interna: $\overline{Nu}_{D_H} = 0.02Re_{D_H}^{0.8}Pr^{1/3} \left( \frac{D_e}{D_i} \right)^{0.53}$	turbulento, $Re_{D_H} > 10^4$ , $0.6 < Pr < 700$ diámetro hidráulico $D_H = D_e - D_i$
flujo dentro de serpentines $D_s$ = diámetro serpentin	$\overline{Nu}_{D_H} = 0.116(Re_D^{2/3} - 125)Pr^{1/3} \left( 1 + 3.5 \frac{D}{D_s} \right) \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	turbulento, $Re_{D_H} > 10^4$ , $0.6 < Pr < 700$

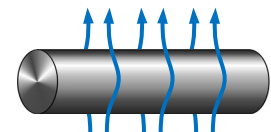
Tabla 4.7 Algunas correlaciones para convección libre.

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	LONGITUD CARACTERÍSTICA
<p>superficie plana vertical superficie caliente o fría</p> 	$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387Ra_L^{1/6}}{\left[ 1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$ <p>(para cualquier valor de <math>Ra_L</math>)</p> <p>también aplica para cilindros verticales si <math>D &gt; \frac{35L}{Gr_L^{1/4}}</math></p>	<p>distancia <math>L</math> sobre la superficie en la dirección del movimiento del fluido</p>

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	LONGITUD CARACTERÍSTICA
<p><b>superficie plana inclinada</b> por arriba de una superficie fría o por debajo de una superficie caliente</p> 	<p>misma ecuación que para superficies planas verticales, pero usando <math>g \cos \theta</math> en lugar de <math>g</math> al calcular <math>Gr</math> (para un ángulo <math>\theta</math> entre 0 y <math>60^\circ</math> respecto a la vertical)</p>	<p>distancia <math>L</math> sobre la superficie en la dirección del movimiento del fluido</p>
<p><b>superficie plana horizontal</b> por debajo de una superficie fría o por arriba de una superficie caliente</p> 	$\overline{Nu}_L = 0.54 Ra_L^{1/4} \quad (10^4 < Ra_L < 10^7)$ $\overline{Nu}_L = 0.15 Ra_L^{1/3} \quad (10^7 < Ra_L < 10^{11})$	$L = \frac{\text{área}}{\text{perímetro}}$
<p><b>superficie plana horizontal</b> por arriba de una superficie fría o por debajo de una superficie caliente</p> 	$\overline{Nu}_L = 0.27 Ra_L^{1/4} \quad (10^5 < Ra_L < 10^{10})$	$L = \frac{\text{área}}{\text{perímetro}}$
<p><b>cilindro horizontal</b></p> 	$\overline{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{\left[ 1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad (Ra_D < 10^{12})$	<p>diámetro <math>D</math></p>
<p><b>esfera</b></p> 	$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{\left[ 1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}} \quad (Ra_D < 10^{11})$	<p>diámetro <math>D</math></p>

**EJEMPLO 4.8**

Para enfriar un cilindro metálico de 1 plg de diámetro y 5 plg de longitud se va a colocar en una corriente de agua a  $10^\circ\text{C}$  moviéndose a 3.5 cm/s perpendicularmente al eje del cilindro. Considerando únicamente la convección en la superficie lateral del cilindro, estimar el coeficiente de transferencia de calor por convección, la densidad de flujo de calor por convección y la rapidez de transferencia de calor entre el cilindro y el agua, cuando la temperatura superficial del cilindro es  $80^\circ\text{C}$ .



**SOLUCIÓN**

Los datos proporcionados en el enunciado son:

$$D = 1 \text{ in} = 0.0254 \text{ m}$$

$$v = 3.5 \text{ cm/s} = 0.035 \text{ m/s}$$

$$T_w = 80^\circ\text{C}$$

$$T_\infty = 10^\circ\text{C}$$

Primero se determina la temperatura promedio de película:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{80^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C}}{2} = 45^\circ\text{C}$$

Luego se buscan las propiedades del agua a  $45^\circ\text{C}$ :

$$\begin{aligned}\rho &= 990.17 \text{ kg/m}^3 \\ \mu &= 0.596 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \\ k &= 0.637 \text{ W/m} \cdot \text{K} \\ \text{Pr} &= 3.910\end{aligned}$$

Se calcula el número de Reynolds:

$$\begin{aligned}\text{Re}_D &= \frac{\rho v D}{\mu} \\ \text{Re}_D &= \frac{(990.17 \text{ kg/m}^3)(0.035 \text{ m/s})(0.0254 \text{ m})}{0.596 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} \\ \text{Re}_D &= 1476.9\end{aligned}$$

Se seleccionó la siguiente correlación:

$$\begin{aligned}\overline{\text{Nu}}_D &= (0.506 \text{Re}_D^{1/2} + 0.00141 \text{Re}_D) \text{Pr}^{1/3} \\ \overline{\text{Nu}}_D &= [0.506(1476.9)^{1/2} + 0.00141(1476.9)](3.910)^{1/3} \\ \overline{\text{Nu}}_D &= 33.916\end{aligned}$$

Ahora, de la definición del número de Nusselt, se calcula el coeficiente de transferencia de calor:

$$\overline{\text{Nu}}_D = \frac{hD}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{k}{D} \overline{\text{Nu}}_D$$

$$\begin{aligned}h &= \frac{0.637 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{0.0254 \text{ m}} (33.916) \\ h &= 850.6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}\end{aligned}$$

La densidad de flujo de calor se calcula con la ley de Newton del enfriamiento:

$$\begin{aligned}q &= h \Delta T \\ q &= (850.6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K})(80 \text{ }^\circ\text{C} - 10 \text{ }^\circ\text{C}) \\ q &= 59542 \text{ W/m}^2\end{aligned}$$

Para obtener la rapidez de transferencia de calor, es necesario primero calcular el área lateral del cilindro:

$$A = \pi D L = \pi(0.0254 \text{ m})(0.127 \text{ m}) = 0.010134 \text{ m}^2$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}q &= \frac{Q}{A} \quad \rightarrow \quad Q = qA \\ Q &= (59542 \text{ W/m}^2)(0.010134 \text{ m}^2) \\ Q &= 603.4 \text{ W}\end{aligned}$$

#### EJEMPLO 4.9

Estimar la rapidez con la que se pierde calor desde la superficie exterior de una ventana de 2 metros de ancho y 1.5 metros de alto. La superficie del vidrio se encuentra a 20 °C (uniforme) y el aire exterior está en reposo a 0 °C.

#### SOLUCIÓN

Primero se calcula la temperatura promedio de la película:

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} = \frac{20 \text{ }^\circ\text{C} + 0 \text{ }^\circ\text{C}}{2} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

Las propiedades del aire a 10 °C que se necesitan son:

$$\begin{aligned}v &= 14.34 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ k &= 0.0253 \text{ W/m} \cdot \text{K} \\ \text{Pr} &= 0.709 \\ \beta &= \frac{1}{T_f} = \frac{1}{285.15 \text{ K}} = 3.5335 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}\end{aligned}$$

Como el aire está en reposo, se trata de un caso de convección libre, por lo que primero se calcula el número de Grashof. Aunque la ventana es de 2 m de ancho y 1.5 m de alto, la longitud característica que se necesita es el alto de la ventana, porque es

la distancia que recorre el aire sobre la superficie, al calentarse y ascender, por lo que  $L = 1.5 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned}\text{Gr}_L &= \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L^3}{v^2} \\ \text{Gr}_L &= \frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(3.5317 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1})|20 \text{ }^\circ\text{C} - 0 \text{ }^\circ\text{C}|(1.5 \text{ m})^3}{(14.34 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})^2} \\ \text{Gr}_L &= 1.1373 \times 10^{10}\end{aligned}$$

Luego se calcula el número de Rayleigh:

$$\begin{aligned}\text{Ra}_L &= \text{Gr}_L \cdot \text{Pr} \\ \text{Ra}_L &= (1.1373 \times 10^{10})(0.709) \\ \text{Ra}_L &= 8.063 \times 10^9\end{aligned}$$

El número de Nusselt se calcula con la correlación para superficies planas verticales:

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{\left[ 1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$$

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 (8.063 \times 10^9)^{1/6}}{\left[ 1 + (0.492 / 0.709)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$$

$$\overline{Nu}_L = 235.65$$

De la definición del número de Nusselt, se despeja el coeficiente de transferencia de calor:

$$\overline{Nu}_L = \frac{hL}{k} \Rightarrow h = \overline{Nu}_L \frac{k}{L}$$

$$h = (235.65) \frac{0.0253 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{1.5 \text{ m}}$$

$$h = 3.9747 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Con la ley de Newton del enfriamiento, se calcula la densidad de flujo de calor:

$$q = h\Delta T$$

$$q = (3.9747 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K})(20 \text{ }^\circ\text{C} - 0 \text{ }^\circ\text{C})$$

$$q = 79.494 \text{ W/m}^2$$

y el flujo total de calor se obtiene al multiplicar por el área:

$$Q = qA$$

$$Q = (79.494 \text{ W/m}^2)(2 \text{ m} \times 1.5 \text{ m})$$

$$Q = 238.5 \text{ W}$$

■

### 4.3 Radiación

La transferencia de calor por radiación presenta complicaciones adicionales, comparada con la conducción o la convección, por lo que frecuentemente se desprecia para simplificar el análisis, especialmente cuando las temperaturas no son elevadas. Sin embargo, algunos casos en ingeniería química en los que sí debe considerarse incluyen:

- ★ Pérdidas de calor en equipos operando a alta temperatura.
- ★ Transferencia de calor en hornos e incineradores.
- ★ Tanques de almacenamiento expuestos a la intemperie (durante el día y enfriamiento en la noche).

Todos los cuerpos cuya temperatura sea superior al cero absoluto emiten radiación electromagnética. La cantidad de energía emitida, y las longitudes de onda en las que se emite dependen de la temperatura del objeto. El ejemplo clásico de la radiación es la manera en la que la Tierra recibe energía del Sol. Debido a su alta temperatura, el Sol emite una gran cantidad de radiación electromagnética, en todas direcciones. La Tierra también emite radiación, pero en menor cantidad y mayores longitudes de onda, debido a su temperatura. De toda la radiación emitida por el Sol, una pequeña fracción es interceptada por la Tierra, y de toda la energía emitida por la Tierra, una pequeña cantidad es interceptada por el Sol. Sin embargo, la cantidad de radiación que la Tierra recibe del Sol es mucho mayor que la que el Sol recibe de la Tierra, habiendo entonces un flujo neto de calor del Sol a la Tierra. Si el Sol y la Tierra estuvieran a la misma temperatura, entonces la cantidad de radiación del Sol que recibe la Tierra sería igual a la cantidad de radiación que la Tierra recibe del Sol, y el flujo neto de energía sería cero. Ya que la cantidad de energía transferida depende de la diferencia de temperatura, esto confirma que la radiación es un mecanismo de transferencia de calor.

#### 4.3.1 Espectro electromagnético

Un dipolo eléctrico oscilante crea ondas de campos variables eléctrico y magnético que se propagan a la velocidad de la luz, incluso en el vacío. Una onda electromagnética está caracterizada por su longitud de onda  $\lambda$ , que es la distancia que existe entre crestas sucesivas de la onda, o por su frecuencia  $\nu$ , que es el número de oscilaciones que presenta el

campo electromagnético en un segundo. Estas dos cantidades no son independientes, sino que están relacionadas con la velocidad de la luz  $c$ , que es una constante fundamental del universo ( $c = 2.99792458 \times 10^8$  m/s).

$$c = \lambda \nu \tag{4.58}$$

Dependiendo de la longitud de onda, las ondas electromagnéticas presentan características que permiten clasificarlas en diversos tipos, en lo que se conoce como *espectro electromagnético*. De mayor a menor longitud de onda, el espectro está conformado por ondas de radio, microondas, infrarrojo, visible, ultravioleta, rayos X y rayos gamma (Figura 4.5). La división entre un tipo y otro es más o menos arbitraria; en algunos casos la transición es gradual.

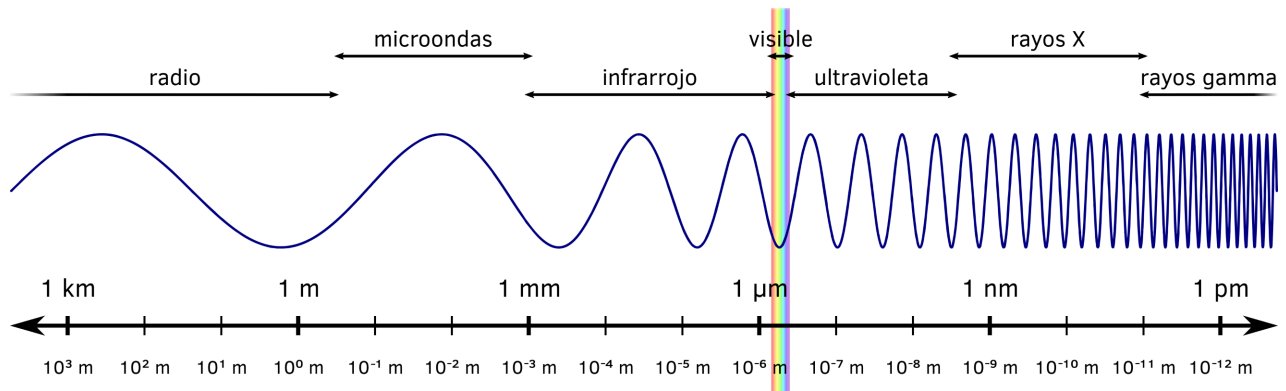


Figura 4.5 Espectro electromagnético.

La teoría electromagnética predice que cualquier carga eléctrica que esté sujeta a una aceleración emite ondas electromagnéticas. En cualquier objeto, las moléculas (y los átomos de las que están formadas) están en constante movimiento, vibrando y oscilando. Ya que están constituidos por partículas cargadas eléctricamente (protones y electrones), estos cambios de dirección en su movimiento hacen que todos los cuerpos emitan ondas electromagnéticas.

La intensidad de la radiación emitida, así como la longitud de onda a la que se emite, depende en primera instancia de la temperatura del objeto. A temperatura ambiente, la mayor parte de la radiación se emite en el infrarrojo. Si un objeto (por ejemplo, una barra metálica), se calienta lo suficiente, empieza a emitir radiación apreciablemente en longitudes de onda correspondientes a la luz visible, y se observa que el objeto empieza a brillar, primero en un color rojo oscuro, y luego anaranjado, amarillo, blanco... según se va calentando.

Un objeto, a temperatura ambiente, emite radiación principalmente en el infrarrojo, pero si se calienta lo suficiente empieza a brillar en longitudes de onda visibles. El espectro electromagnético (Tabla 4.8) está dividido en siete regiones, dependiendo de las características de la radiación electromagnética, su longitud de onda y su mecanismo de producción. La división entre un tipo y otro generalmente no es muy definida, y diferentes referencias pueden dar rangos ligeramente diferentes.

Tabla 4.8 Espectro electromagnético.

Tipo de onda	Longitud de onda	Características importantes
ondas de radio	$10^3 - 3 \times 10^{-1}$ m	Las ondas de radio de origen natural se producen por relámpagos o por objetos astronómicos. Las producidas artificialmente se emplean para transmisiones de radio, radar, comunicación por satélite, redes inalámbricas, etcétera. Para evitar interferencia, la generación de ondas de radio está estrictamente controlada por ley.
microondas	$3 \times 10^{-1} - 3 \times 10^{-3}$ m	Las microondas se emplean en sistemas de transmisión punto-a-punto, en el estudio de objetos estelares (radioastronomía), en sistemas de radar, y en hornos domésticos para alimentos.

Tipo de onda	Longitud de onda	Características importantes
infrarrojo	$3 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-7} \text{ m}$	Fue el primer tipo de luz (después de la luz visible) en ser descubierta, por sir William Herschel en 1800. Inicialmente se le llamó "rayos calóricos". La radiación infrarroja es emitida o absorbida por moléculas cuando cambian su estado vibracional o rotacional, haciéndola particularmente útil para en estudio de la estructura molecular.
visible	$7 \times 10^{-7} - 4 \times 10^{-7} \text{ m}$	Es la porción del espectro electromagnético a la cual son sensibles los ojos humanos, responsable del sentido de la vista y de la sensación de color. En el siglo XVII, sir Isaac Newton descubrió que un prisma podía descomponer la luz blanca en todos los colores, y acuñó el término <i>espectro</i> (del latín, que significa "aparición") para referirse a este fenómeno.
ultravioleta	$4 \times 10^{-7} - 3 \times 10^{-9} \text{ m}$	Inicialmente llamados "rayos químicos" porque inducían ciertas reacciones químicas. De la radiación ultravioleta del Sol, una parte es absorbida por la atmósfera, en particular por el ozono estratosférico. La síntesis biológica de vitamina D en la piel requiere de luz ultravioleta. Algunos insectos pueden detectar la luz ultravioleta.
rayos X	$3 \times 10^{-9} - 10^{-11} \text{ m}$	Descubiertos en 1895 por Wilhelm Röntgen, quien los llamó así para indicar que era un tipo desconocido de radiación. Debido a su poder de penetración, su principal aplicación es obtener imágenes del interior de objetos, tal como la radiografía clínica o para seguridad en aeropuertos. Ya que su longitud de onda es comparable con el tamaño de los átomos, también se emplean para estudiar la estructura cristalina de los materiales, mediante <i>crystalografía de rayos X</i> .
rayos gamma	$< 10^{-11} \text{ m}$	Descubiertos en 1900 por Paul Villard, al estudiar la radiación emitida por el elemento químico <i>radio</i> , y nombrados posteriormente por Ernest Rutherford. Los rayos gamma son fuertemente ionizantes, por lo que son dañinos para los seres vivos. Se producen de forma natural en ciertos tipos de desintegración radioactiva, y en la interacción de rayos cósmicos con la atmósfera terrestre.

### 4.3.2 Cuerpo negro

Cuando una onda electromagnética incide en un objeto, puede ser reflejada, transmitida o absorbida. Un *cuerpo negro* es un objeto ideal que absorbe toda la luz que recibe, sin reflejar o transmitir nada de ella (por eso se llama cuerpo negro, al no reflejar nada de luz no tendría color al ser iluminado con luz visible). Un cuerpo negro es, por lo tanto, un *absorbedor ideal*.

Adicionalmente, un cuerpo negro es un *emisor ideal*, es decir, un cuerpo que emite radiación electromagnética en un patrón específico de intensidad y longitud de onda (de acuerdo a la ley de Planck que se describe a continuación). Si su temperatura es suficientemente alta, un cuerpo negro de hecho se puede ver de color rojo, anaranjado, amarillo, blanco... debido a la luz que emite según su temperatura, justo como una barra metálica caliente\*.

### 4.3.3 Ley de Planck

Al analizar teóricamente la emisión de ondas electromagnéticas desde un cuerpo, debido a la vibración de sus moléculas, la mecánica clásica predecía que un cuerpo emitiría más energía en longitudes de onda más cortas. Esto significaría que, al calentar un objeto, en vez de empezar a brillar de color rojo, comenzaría a brillar de color violeta. Obviamente, éste no es el caso, y esta crucial discrepancia entre la teoría y la observación empírica se conoció como *la catástrofe ultravioleta*.

Buscando una solución a la catástrofe ultravioleta, Max Planck desarrolló a principios del siglo XX una fórmula<sup>†</sup> que describía adecuadamente la intensidad emitida por un cuerpo negro, en función de la longitud de onda<sup>‡</sup>:

\* De hecho, el Sol emite radiación electromagnética casi como un cuerpo negro con una temperatura  $T_{\odot} = 5780 \text{ K}$ .

† Plank no dedujo de esta ecuación a partir de las teorías existentes, simplemente fue una fórmula que concordaba con las mediciones experimentales. Al buscar explicar teóricamente su ley, Plank sentó las bases de la mecánica cuántica.

‡ La ley de Planck también se puede expresar en función de la frecuencia  $\nu$  de la onda: 
$$E_{b,\nu} = \frac{2h\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)}$$

$$E_{b,\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)} \quad (4.59)$$

donde  $E_{b,\lambda}$  es la densidad de flujo espectral de energía, en  $\text{W/m}^3$ , emitida por un cuerpo negro (el subíndice  $b$  viene del inglés "black") entre longitudes de onda  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$  (indicado por el subíndice  $\lambda$ ),  $h$  es la constante de Planck ( $6.026 \times 10^{-34}$  J·s),  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $k$  es la constante de Boltzmann ( $1.3806 \times 10^{-23}$  J/K) y  $T$  es la temperatura termodinámica en K. La Figura 4.6 muestra la ley de Planck a varias temperaturas.

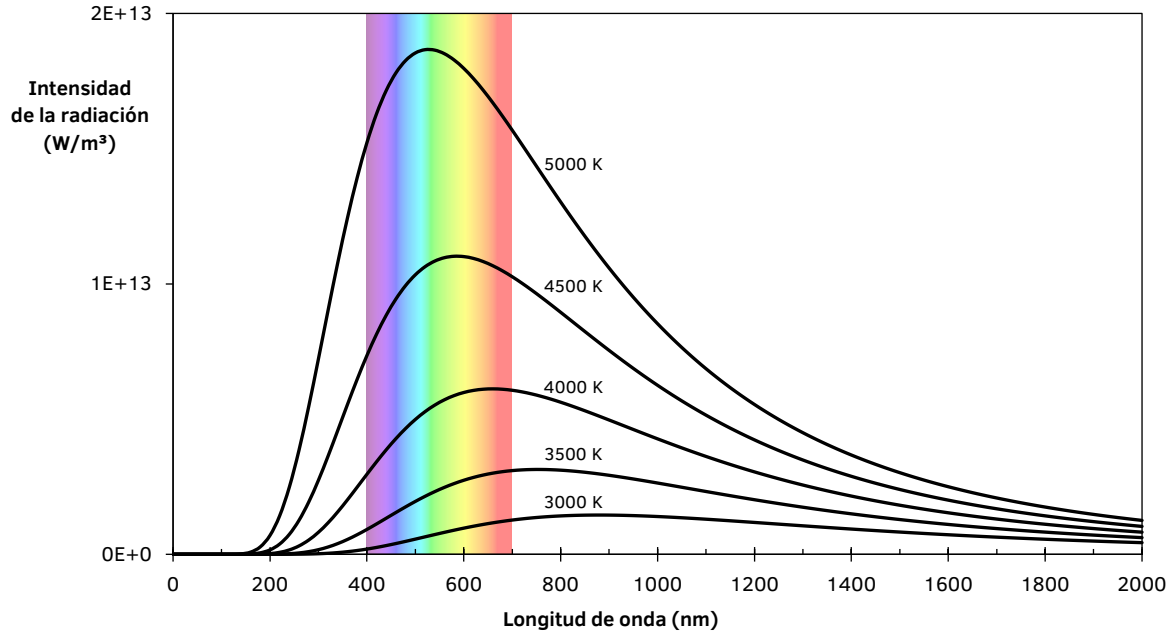


Figura 4.6 Ley de Planck.

Obsérvese que, al aumentar la temperatura, aumenta la intensidad de la radiación emitida. También obsérvese que la longitud de onda a la cual se emite el máximo de cada curva se desplaza hacia longitudes de onda más cortas al aumentar la temperatura. De hecho, el producto de la longitud de onda en el punto de máxima intensidad por la temperatura absoluta es un valor constante, se conoce como *ley del desplazamiento de Wien*:

$$\lambda_{\max} T = 0.2884 \text{ cm} \cdot \text{K} \quad (4.60)$$

en la cual  $\lambda_{\max}$  es la longitud de onda en cm a la cual se emite la máxima intensidad de radiación, y  $T$  es la temperatura absoluta en K.

#### 4.3.4 Ley de Stefan-Boltzmann

La ley de Planck (Ecuación 4.59) establece cuánta energía emite un cuerpo negro en una cierta longitud de onda  $\lambda$ . La integral de esta ecuación con respecto a la longitud de onda (de cero a infinito) es la cantidad total de energía emitida como radiación por el cuerpo negro  $q_b$ :

$$q_b = \int_0^{\infty} E_{b,\lambda} d\lambda \quad (4.61)$$

De esta integral se obtiene la *ley de Stefan-Boltzmann*, la cual establece que la cantidad total de energía emitida por un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta:

$$q_b = \sigma T^4 \quad (4.62)$$

donde  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$  es la constante de Stefan-Boltzmann\*.

- ★ **Ley de Stefan-Boltzmann:** La cantidad de energía emitida en forma de radiación electromagnética por un cuerpo negro, es directamente proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.

Es importante mencionar que esta dependencia de la cuarta potencia en la ley de Stefan-Boltzmann es una de las causas de la complejidad del análisis matemático de la transferencia de calor por radiación.

#### EJEMPLO 4.10

Determinar la densidad de flujo de calor emitido por radiación (de acuerdo a la ley de Stefan-Boltzmann) y la longitud de onda a la cual se emite la máxima cantidad de radiación (de acuerdo a la ley de Wien) para cada uno de los objetos siguientes, tratados como si fueran cuerpos negros: (A) una persona a temperatura ambiente, 25 °C, (B) un horno a 180 °C, y (C) la superficie del Sol a 5000 K.

#### SOLUCIÓN

**Ley de Planck:**  $q_b = \sigma T^4$  donde  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ .

**Ley del desplazamiento de Wien:**  $\lambda_{\max} T = 0.2884 \text{ cm} \cdot \text{K}$

$$\text{despejada: } \lambda_{\max} = \frac{0.2884 \text{ cm} \cdot \text{K}}{T}$$

(A) una persona a 25 °C = 298.15 K

$$q_b = (5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(298.15 \text{ K})^4$$

$$q_b = 448.05 \text{ W/m}^2$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0.2884 \text{ cm} \cdot \text{K}}{298.15 \text{ K}}$$

$$\lambda_{\max} = 9.67 \times 10^{-4} \text{ cm} = 9.67 \text{ } \mu\text{m}$$

(B) un horno a 180 °C = 453.15 K

$$q_b = (5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(453.15 \text{ K})^4$$

$$q_b = 2390.8 \text{ W/m}^2$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0.2884 \text{ cm} \cdot \text{K}}{453.15 \text{ K}}$$

$$\lambda_{\max} = 6.36 \times 10^{-4} \text{ cm} = 6.36 \text{ } \mu\text{m}$$

(C) la superficie del Sol a 5000 K

$$q_b = (5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(5000 \text{ K})^4$$

$$q_b = 3.54 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0.2884 \text{ cm} \cdot \text{K}}{5000 \text{ K}}$$

$$\lambda_{\max} = 5.768 \times 10^{-5} \text{ cm} = 576.8 \text{ nm}$$

■

\* No confundir la constante de Stefan-Boltzmann con el diámetro de colisión  $\sigma$  (medido en Å) que se emplea en la teoría cinética de Chapman-Enskog para estimar viscosidad, conductividad térmica o difusividad en gases a baja presión.

### 4.3.5 Cuerpo gris

Muchos cuerpos reales emiten radiación de forma similar a un cuerpo negro, pero en menor intensidad, por lo que es conveniente definir un cuerpo gris:

- ★ **Cuerpo gris:** Es un cuerpo que emite radiación electromagnética con una distribución de energía similar a la de un cuerpo negro, pero en una proporción menor. Está caracterizado por una emisividad\*  $\varepsilon$ , que puede tomar valores entre cero y uno.

Cuando la emisividad es igual a uno, el cuerpo gris emite igual como un cuerpo negro. Incorporando la emisividad en la ley de Stefan-Boltzmann, se tiene que para un cuerpo gris es:

$$q = \sigma \varepsilon T^4 \quad (4.63)$$

Generalmente, el cuerpo gris se emplea como una aproximación para un cuerpo real, que emite radiación en una distribución más irregular.

### 4.3.6 Transferencia de calor por radiación entre dos objetos

El sistema de coordenadas esférico (Figura 4.7) es el más conveniente para analizar la transferencia de calor por radiación. En este sistema,  $r$  es la distancia medida desde el origen hasta el punto de interés,  $\theta$  es el ángulo medido desde el lado positivo del eje  $z$  (del “polo norte” hasta el “polo sur”) y  $\phi$  es el ángulo medido desde el lado positivo del eje  $x$  (alrededor de la esfera).

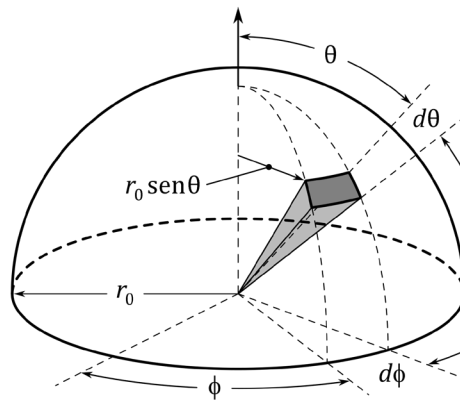


Figura 4.7 Ángulo sólido en coordenadas esféricas.

Considérese la región comprendida entre los planos  $\theta$  y  $\theta+d\theta$ , y los planos  $\phi$  y  $\phi+d\phi$  (Figura 4.7). Estos planos intersectan una esfera de radio  $r_0$ , delimitando una superficie  $dS$  (aproximadamente cuadrada).

El ángulo sólido  $d\Omega$  (medido en estereorradianes), se define como el área  $dS$  dividida entre el cuadrado del radio de la esfera:

$$d\Omega \equiv \frac{dS}{r_0^2} \quad (4.64)$$

\* Tampoco confundir la emisividad con la energía característica  $\varepsilon$  (medida en J) que se emplea en la teoría cinética de Chapman-Enskog.

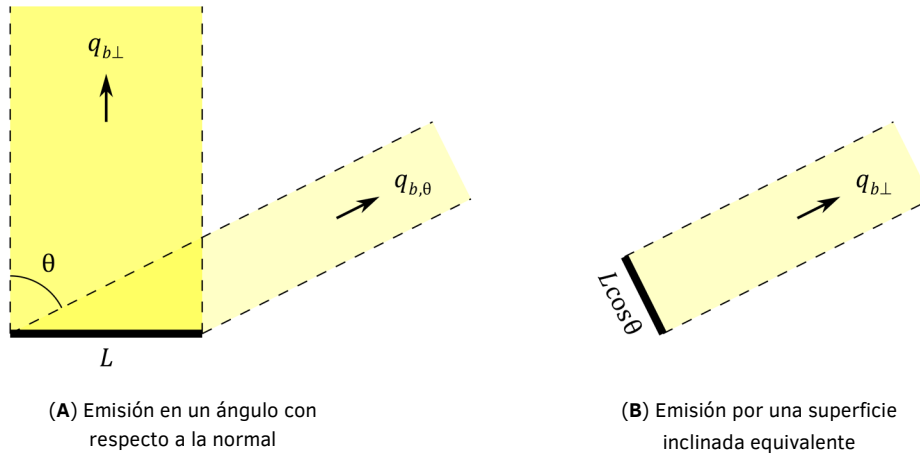
De la Figura 4.7 se puede deducir que  $dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\phi$ , por lo que el ángulo sólido es :

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (4.65)$$

#### 4.3.6.1 Ley del coseno de Lambert

Un cuerpo negro, como radiador perfecto, emite radiación en forma difusa, es decir, en forma equivalente en cualquier dirección. Sin embargo, debido a la perspectiva, un área finita de cuerpo negro parece tener un tamaño diferente dependiendo del ángulo con que se observe. La ley del coseno de Lambert establece la cantidad de radiación emitida en la dirección del ángulo  $\theta$  respecto a la normal a la superficie,  $q_{b,\theta}$ .

Para establecer esta ley, considérese un cuerpo negro emisor de forma rectangular, de longitud  $L$  y ancho  $W$  (Figura 4.8). La cantidad de energía radiada por unidad de área, emitida en la dirección  $\theta$ , debe ser igual que la cantidad de energía radiada perpendicularmente por una superficie equivalente perpendicular a la dirección  $\theta$  :



**Figura 4.8** Deducción de la ley del coseno de Lambert.

La cantidad total de energía radiada en el caso (A) en la dirección  $\theta$  está dada por el producto de la densidad de flujo de energía por el área, es decir  $q_{b,\theta} LW$ . En el caso (B), por geometría, la superficie tiene lados  $L \cos\theta$  y  $W$ , por lo que la cantidad total de energía radiada es  $q_{b,\perp} LW \cos\theta$ , donde  $q_{b,\perp}$  es la energía radiada de forma perpendicular a la superficie. Estas dos cantidades deben ser iguales:

$$q_{b,\theta} LW = q_{b,\perp} LW \cos\theta \quad (4.66)$$

Cancelando  $LW$  en ambos lados de la ecuación:

$$q_{b,\theta} = q_{b,\perp} \cos\theta \quad (4.67)$$

Sin embargo, aún es necesario determinar  $q_{b,\perp}$ . Para esto, se observa que la cantidad total de energía radiada considerando todas las direcciones simultáneamente, debe ser igual a la energía radiada de acuerdo a la ley de Stefan-Boltzmann. Para ello, se integra  $q_{b,\theta}$  con respecto al ángulo sólido  $d\Omega$  en un hemisferio\* y se iguala a  $q_b$ :

\* El hemisferio es importante en el análisis de la transferencia de calor por radiación, porque la emisión ocurre únicamente de la superficie hacia afuera, no hacia adentro del cuerpo. En el sistema de coordenadas esféricas, el hemisferio corresponde a los rangos  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \phi < 2\pi$ , de ahí los límites que se utilizan en la integración.

$$\iint_{\text{hemisferio}} q_{b,\theta} d\Omega = q_b \quad (4.68)$$

Sustituyendo  $q_{b,\theta} = q_{b\perp} \cos\theta$  y  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ :

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} q_{b\perp} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi = q_b \quad (4.69)$$

Pero  $q_{b\perp}$  es constante, y el integrando no depende de  $\phi$ , así que la integral respecto a  $\phi$ , es simplemente  $2\pi$ :

$$2\pi q_{b\perp} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = q_b \quad (4.70)$$

y la integral respecto a  $\theta$  se resuelve integrando como  $u^n$  (con  $u = \sin\theta$ ,  $du = \cos\theta d\theta$  y  $n=1$ ):

$$\pi q_{b\perp} \left[ \sin^2\theta \right]_0^{\pi/2} = q_b \quad (4.71)$$

Al sustituir límites,  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  y  $\sin(0) = 0$ , con lo que queda simplemente  $\pi q_{b\perp} = q_b$ . Al despejar  $q_{b\perp}$  se tiene:

$$q_{b\perp} = \frac{q_b}{\pi} \quad (4.72)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 6.10 ( $q_{b,\theta} = q_{b\perp} \cos\theta$ ) se llega a la **ley del coseno de Lambert**:

$$q_{b,\theta} = \frac{q_b \cos\theta}{\pi} \quad (4.73)$$

donde  $q_b$  está dado por la ley de Stefan-Boltzmann ( $q_b = \sigma T^4$ ).

#### 4.3.6.2 Cantidad de calor intercambiado por radiación entre dos objetos negros

Para determinar la cantidad neta de calor que se transfiere por radiación entre dos cuerpos negros ("1" y "2" en la Figura 4.9), hay que comenzar considerando un elemento diferencial de área  $dA_1$  en el cuerpo 1 que puede "ver" a otro elemento de área  $dA_2$  en el cuerpo 2. Estos dos elementos de área están unidos por una línea recta de longitud  $r_{12}$ , que forma un ángulo  $\theta_1$  con respecto a la normal a  $dA_1$  y que forma un ángulo  $\theta_2$  con la normal a  $dA_2$ .

A partir del elemento  $dA_1$  se toma un ángulo sólido que está dado por  $d\Omega_1 = \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$ . Al proyectar este ángulo sólido a la distancia  $r_{12}$  se forma un área diferencial  $dS = r_{12}^2 \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$ . Este ángulo sólido se asume lo suficientemente grande para que  $dA_2$  quede completamente dentro del área proyectada  $dS$ .

Ahora bien, la cantidad de energía radiada desde  $dA_1$  a través del ángulo sólido  $d\Omega_1$  está dada por:

$$(q_{b,\theta} dA_1) \cdot \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \quad (4.74)$$

sustituyendo la ley del coseno de Lambert (ecuación 4.73):

$$\left( \frac{q_b \cos\theta_1}{\pi} dA_1 \right) \cdot \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$$

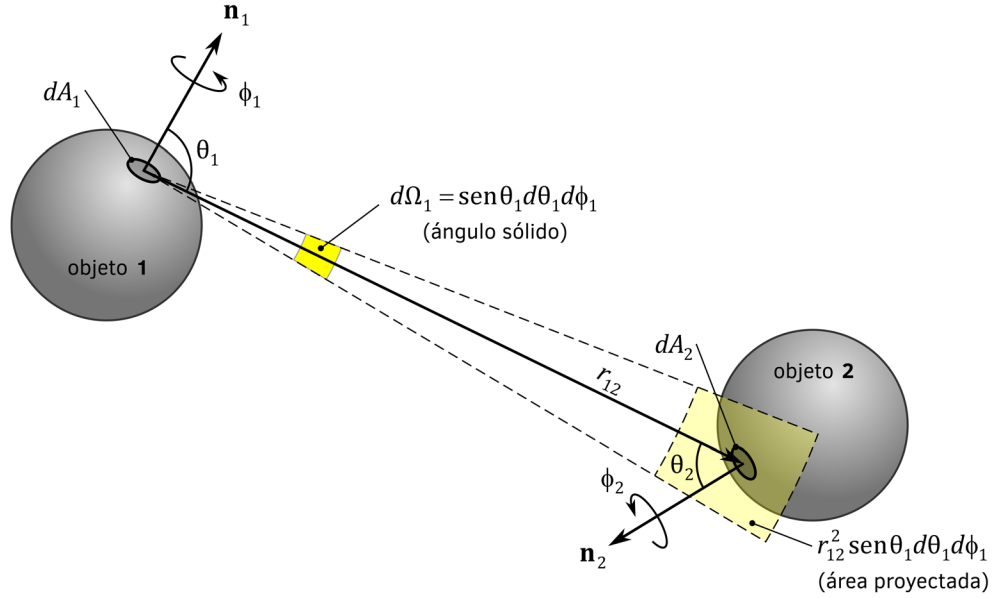


Figura 4.9 Deducción del factor de visión entre dos cuerpos negros.

y finalmente sustituyendo la ley de Stefan-Boltzmann (ecuación 4.62), la cantidad de energía emitida como radiación desde  $dA_1$  a través del ángulo sólido  $d\Omega_1$  es:

$$\left( \frac{\sigma T_1^4 \cos\theta_1}{\pi} dA_1 \right) \cdot \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \quad (4.75)$$

Pero no toda la radiación que sale de  $dA_1$  es interceptada por  $dA_2$ , debido a que el área  $dA_2$  sólo representa una fracción  $f$  del área proyectada por el ángulo sólido  $d\Omega_1$ , dada por:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{fracción de la radiación emitida} \\ \text{por } dA_1 \text{ que es interceptada por } dA_2 \end{array} \right] = \frac{\text{área de } dA_2 \text{ proyectada en un plano perpendicular a } r_{12}}{\text{área proyectada del ángulo sólido } d\Omega_1 \text{ a la distancia } r_{12}} \quad (4.76)$$

$$f = \frac{dA_2 \cos\theta_2}{r_{12}^2 \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi_1} \quad (4.77)$$

por lo que la cantidad real de radiación de  $dA_1$  recibida por  $dA_2$  es:

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = \left[ \left( \frac{\sigma T_1^4 \cos\theta_1}{\pi} dA_1 \right) \cdot \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \right] \left[ \frac{dA_2 \cos\theta_2}{r_{12}^2 \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi_1} \right] \quad (4.78)$$

energía radiada desde  $dA_1$  fracción del área

Al cancelar el factor  $\text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$  del numerador y del denominador, esta expresión se simplifica a:

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = \frac{\sigma T_1^4 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (4.79)$$

Procediendo de igual modo, pero a partir de la radiación emitida por el cuerpo 2, se deduce que la cantidad de energía radiada desde  $dA_2$  que es recibida por  $dA_1$  es:

$$dQ_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (4.80)$$

La cantidad neta de calor intercambiada entre las áreas  $dA_1$  y  $dA_2$  se obtiene por diferencia (asumiendo  $T_1 > T_2$ ):

$$dQ_{12} = dQ_{1 \rightarrow 2} - dQ_{2 \rightarrow 1} \quad (4.81)$$

por lo tanto

$$dQ_{12} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (4.82)$$

Para obtener la cantidad total de calor transferido entre ambos cuerpos, es necesario integrar tomando todos los posibles pares de áreas diferenciales  $dA_1$  y  $dA_2$  que se pueden “ver” mutuamente:

$$Q_{12} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (4.83)$$

Aunque esta integral se indica como una integral doble, en realidad corresponde a una integral cuádruple, puesto que cada integral de área es a su vez una integral doble.

#### 4.3.6.3 Factores de visión para intercambio de radiación entre dos superficies negras

Obsérvese que la integral doble en la ecuación 4.83 depende únicamente de la geometría del sistema, pero no depende de las temperaturas de ambos cuerpos. Esto lleva a definir los siguientes **factores de visión** (también llamados factores de ángulo o factores de configuración):

$$F_{1-2} \equiv \frac{1}{\pi A_1} \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (4.84)$$

$$F_{2-1} \equiv \frac{1}{\pi A_2} \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2 \quad (4.85)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  generalmente representan las áreas totales de los cuerpos 1 y 2. Al emplear los factores de visión, la cantidad neta de calor transferido por radiación entre los cuerpos 1 y 2 (ecuación 4.83) se expresa como:

$$Q_{12} = A_1 F_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{o equivalentemente} \quad Q_{12} = A_2 F_{2-1} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4.86)$$

Obsérvese que el subíndice del área es el mismo que el primer subíndice del factor de visión, y que éstos cumplen la llamada **relación de reciprocidad**  $A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$ . El factor de visión  $F_{1-2}$  puede interpretarse como la fracción de la radiación emitida por el cuerpo 1 que es directamente interceptada por el cuerpo 2.

La evaluación analítica de la doble integración para calcular el factor de visión es laboriosa incluso para las geometrías más simples. Para geometrías complejas es necesario recurrir a la integración numérica. Para simplificar los cálculos, **los factores de visión se presentan generalmente en forma gráfica**. Las Figuras 4.10 a 4.12 y muestran los factores de visión para algunas configuracones geométricas simples.

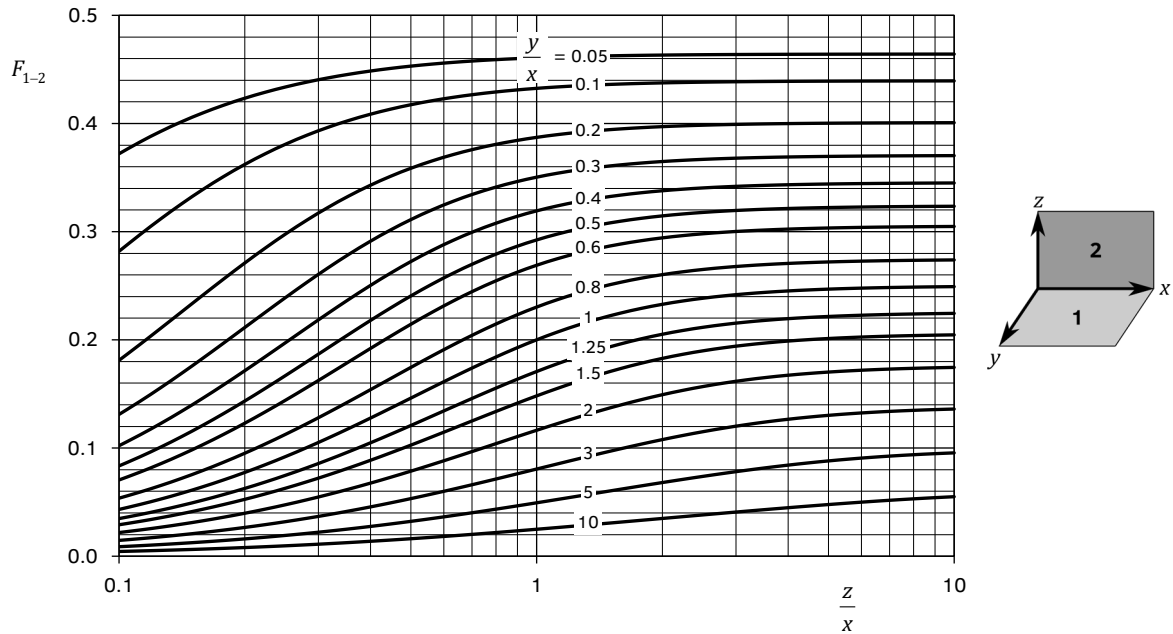


Figura 4.10 Factor de visión para rectángulos perpendiculares con un lado en común.

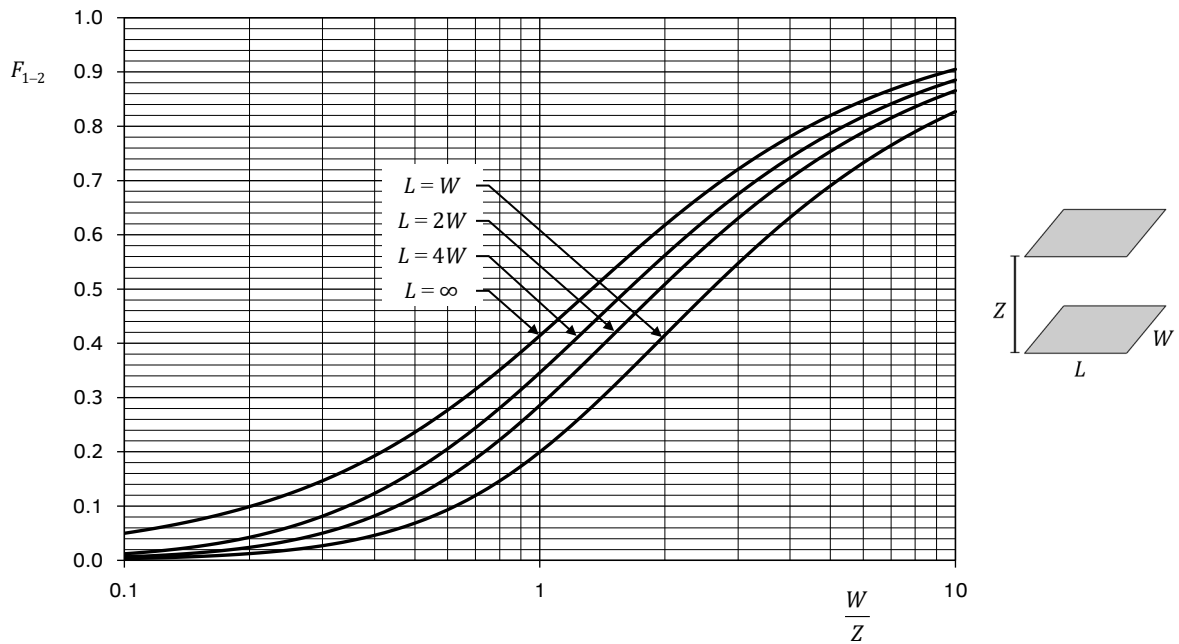


Figura 4.11 Factor de visión para rectángulos idénticos en planos paralelos.

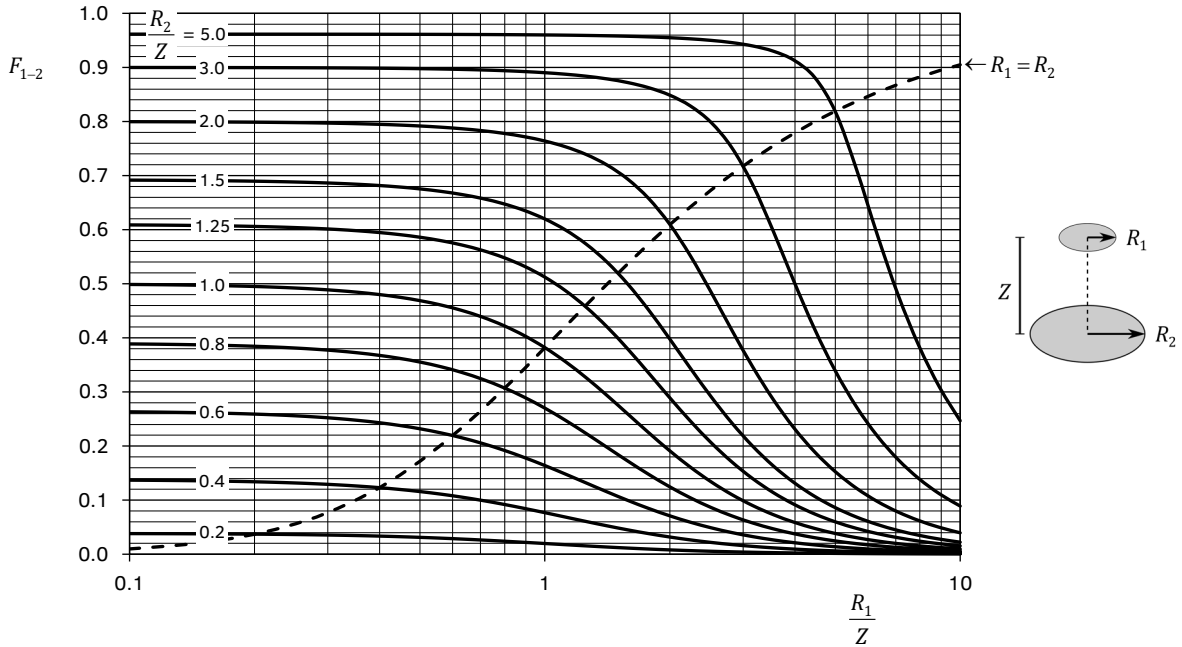


Figura 4.12 Factor de visión para discos en planos paralelos.

4.3.6.4 Corrección del factor de visión para radiación entre dos superficies grises

Si las superficies que intercambian calor no son cuerpos negros, sino superficies grises, caracterizadas por emisividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  respectivamente, se emplea un factor de visión corregido  $F'_{1-2}$ , dado por:

$$F'_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{F_{1-2}} + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \quad (4.87)$$

**EJEMPLO 4.11**

Se está preparando una hamburguesa de 12.5 cm de diámetro en el centro de un asador circular de 30 cm de diámetro. La temperatura del carbón es 470 °C, la temperatura de la superficie de la hamburguesa es 76 °C; y la distancia entre ambos es 5 cm. Determinar la rapidez (en watts) con la que se transfiere calor por radiación, del carbón a la hamburguesa, sabiendo que la emisividad del carbón es 0.75 y la emisividad de la hamburguesa es 0.98.

**SOLUCIÓN**

Necesariamente se asume que la superficie de la hamburguesa y la superficie del carbón se pueden tratar como discos planos, pues es el caso para el cual se tiene gráfica del factor de visión.

Primero se identifica cuál será la superficie 1 y cuál la superficie 2. Como el carbón está a mayor temperatura, se le asigna el número 1 para que la rapidez de transferencia de calor sea un valor positivo. Con esta asignación, los diámetros (y radios) son:

$$D_1 = 30 \text{ cm} \rightarrow R_1 = 0.15 \text{ m}$$

$$D_2 = 12.5 \text{ cm} \rightarrow R_2 = 0.0625 \text{ m}$$

y la distancia entre los discos es:

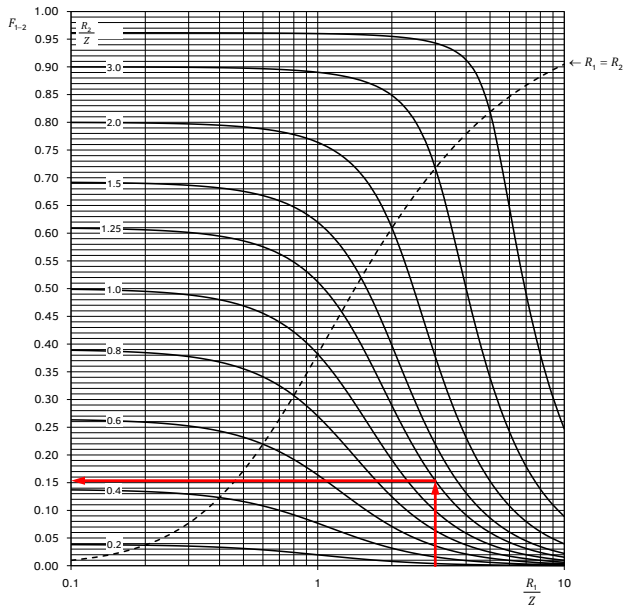
$$Z = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

A continuación se calculan las proporciones necesarias para entrar a la gráfica del factor de visión:

$$\frac{R_1}{Z} = \frac{0.15 \text{ m}}{0.05 \text{ m}} \rightarrow \frac{R_1}{Z} = 3$$

$$\frac{R_2}{Z} = \frac{0.0625 \text{ m}}{0.05 \text{ m}} \rightarrow \frac{R_2}{Z} = 1.25$$

Con estos valores, se lee el factor de visión de la gráfica:



de donde se obtiene  $F_{1-2} = 0.153$ . Este sería el factor de visión para superficies negras, pero el planteamiento del ejercicio proporciona las emisividades, por lo que las superficies son grises. De acuerdo a la asignación de las superficies, las emisividades y las áreas son:

$$\epsilon_1 = 0.75 \quad A_1 = 0.070686 \text{ m}^2$$

$$\epsilon_2 = 0.98 \quad A_2 = 0.012272 \text{ m}^2$$

Sustituyendo para calcular el factor de visión corregido:

$$F'_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{F_{1-2}} + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1\right) + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)}$$

$$F'_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{0.153} + \left(\frac{1}{0.75} - 1\right) + \frac{0.070686 \text{ m}^2}{0.012272 \text{ m}^2} \left(\frac{1}{0.98} - 1\right)}$$

$$F'_{1-2} = 0.143$$

Finalmente, se sustituye en la ecuación de transferencia de calor por radiación:

$$Q_{1-2} = A_1 F_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$Q_{1-2} = (0.070686 \text{ m}^2)(0.143)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4) \times [(743.15 \text{ K})^4 - (349.15 \text{ K})^4]$$

$$Q_{1-2} = 168.9 \text{ W}$$

■

#### 4.3.6.5 Álgebra de factores de visión

Las gráficas para factores de visión se pueden emplear para algunos casos geoméricamente más complicados, al aplicar las siguientes reglas:

- ★ **Relación de reciprocidad:** Mencionada cuando se definieron los factores de visión, el producto de un factor de visión por su área correspondiente, es igual al producto del factor de visión con los subíndices en orden inverso, multiplicado por la otra área. Obsérvese que el subíndice del área siempre es el mismo que el *primer* subíndice de su correspondiente factor de visión.

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \tag{4.88}$$

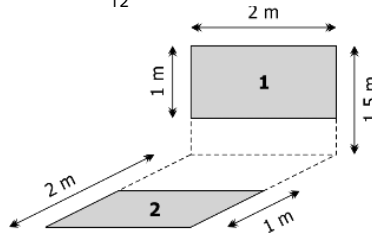
- ★ **Áreas compuestas:** Cuando un área se puede dividir en dos o más áreas, el factor de visión hacia el área compuesta es igual a la suma de los factores de visión hacia las áreas individuales. Esto se utiliza para separar un subíndice compuesto, pero nótese que sólo se puede separar el *segundo* subíndice.

$$F_{1-(2,3)} = F_{1-2} + F_{1-3} \tag{4.89}$$

donde el área (2,3) está compuesta por las áreas 2 y 3.

**EJEMPLO 4.12**

Considérese los dos rectángulos idénticos de 1 m × 2 m que se muestran en la figura, que se pueden considerar superficies negras. Determinar el factor de visión  $F_{12}$ .



RESPUESTA:  $F_{12} = 0.075$

**SOLUCIÓN**

Se designa "a" el área junto al rectángulo 1 y "b" el área junto al rectángulo 2. Se comienza con el factor de visión  $F_{1a-2b}$ , separando el segundo subíndice:

$$F_{1a-2b} = F_{1a-2} + F_{1a-b}$$

Luego se plantea la relación de reciprocidad  $A_1 F_{1a-2} = A_2 F_{2-1a}$  de donde se despeja  $F_{1a-2}$  y se sustituye en la ecuación anterior:

$$F_{1a-2b} = \frac{A_2}{A_1} F_{2-1a} + F_{1a-b}$$

Se separa  $F_{2-1a}$ :

$$F_{1a-2b} = \frac{A_2}{A_1} (F_{2-1} + F_{2-a}) + F_{1a-b}$$

De nuevo se plantea la relación de reciprocidad  $A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2}$  de donde se despeja  $F_{2-1}$  y se sustituye en la ecuación anterior:

$$F_{1a-2b} = \frac{A_2}{A_1} \left( \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} + F_{2-a} \right) + F_{1a-b}$$

Despejando  $F_{1-2}$ :

$$F_{1-2} = \frac{A_1 a}{A_1} (F_{1a-2b} - F_{1a-b}) - \frac{A_2}{A_1} F_{2-a}$$

El factor  $F_{2-a}$  es el único que no se puede determinar de la gráfica. Usando la relación de reciprocidad  $A_2 F_{2-a} = A_a F_{a-2}$ :

$$F_{1-2} = \frac{A_1 a}{A_1} (F_{1a-2b} - F_{1a-b}) - \frac{A_a}{A_1} F_{a-2}$$

Luego, se plantea el factor  $F_{a-2b}$  que se puede separar en  $F_{a-2b} = F_{a-2} + F_{a-b}$ , para despejar  $F_{a-2}$  y sustituir:

$$F_{1-2} = \frac{A_1 a}{A_1} (F_{1a-2b} - F_{1a-b}) - \frac{A_a}{A_1} (F_{a-2b} - F_{a-b})$$

En esta última ecuación, todos los factores de visión corresponden a rectángulos perpendiculares con un lado en común, así que se pueden determinar de la gráfica.

Las áreas son:

$$A_1 = 1 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 2 \text{ m}^2$$

$$A_{1a} = 1.5 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 3 \text{ m}^2$$

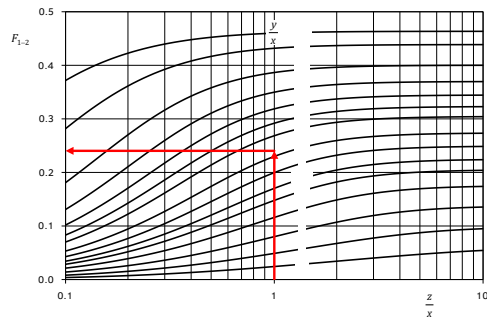
$$A_a = 0.5 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 1 \text{ m}^2$$

Para  $F_{1a-2b}$ :

$$x = 2 \text{ m} \quad y = 1.5 \text{ m} \quad z = 2 \text{ m}$$

$$\frac{z}{x} = 1 \quad \frac{y}{x} = 0.75$$

$$F_{1a-2b} = 0.24$$

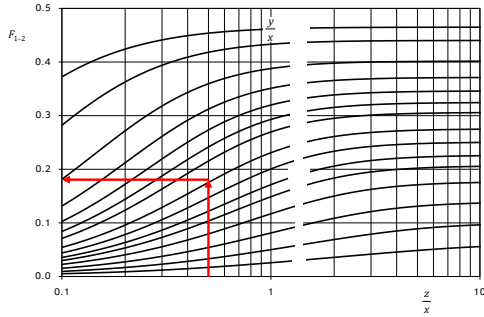


Para  $F_{1a-b}$ :

$$x = 2 \text{ m} \quad y = 1.5 \text{ m} \quad z = 1 \text{ m}$$

$$\frac{z}{x} = 0.5 \quad \frac{y}{x} = 0.75$$

$$F_{1a-b} = 0.18$$

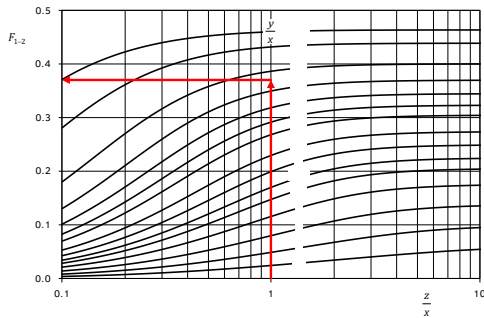


Para  $F_{a-2b}$ :

$$x = 2 \text{ m} \quad y = 0.5 \text{ m} \quad z = 2 \text{ m}$$

$$\frac{z}{x} = 1 \quad \frac{y}{x} = 0.25$$

$$F_{1a-b} = 0.37$$

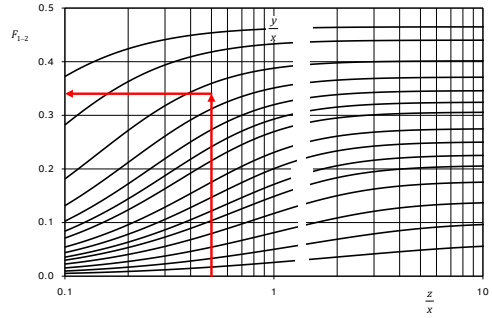


Para  $F_{a-b}$ :

$$x = 2 \text{ m} \quad y = 0.5 \text{ m} \quad z = 1 \text{ m}$$

$$\frac{z}{x} = 0.5 \quad \frac{y}{x} = 0.25$$

$$F_{1a-b} = 0.34$$



Finalmente, se sustituyen todos los valores para encontrar el factor de visión buscado:

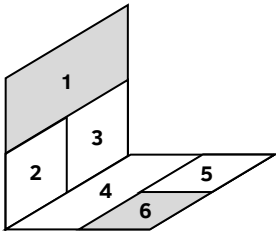
$$F_{1-2} = \frac{A_{1a}}{A_1}(F_{1a-2b} - F_{1a-b}) - \frac{A_a}{A_1}(F_{a-2b} - F_{a-b})$$

$$F_{1-2} = \frac{3 \text{ m}^2}{2 \text{ m}^2}(0.24 - 0.18) - \frac{1 \text{ m}^2}{2 \text{ m}^2}(0.37 - 0.34)$$

$$F_{1-2} = 0.075$$

■

**EJEMPLO 4.13**



Considérese dos rectángulos idénticos perpendiculares, cada uno dividido a la mitad, y una mitad de cada rectángulo dividida nuevamente a la mitad, como se muestra en la figura. Expresar el factor de visión  $F_{1-6}$  en términos de factores de visión que se puedan obtener directamente de la gráfica disponible (radiación directa entre rectángulos perpendiculares con un lado en común). Nota: obsérvese que por simetría,  $F_{1-5} = F_{1-6}$ .

**SOLUCIÓN**

Comenzar con  $F_{123-456}$ , separando el segundo subíndice:

$$F_{123-456} = F_{123-4} + F_{123-56}, \text{ y despejar } F_{123-56}:$$

$$F_{123-56} = F_{123-456} - F_{123-4}$$

Plantear la relación de reciprocidad y despejar:

$$A_{123}F_{123-56} = A_{56}F_{56-123}$$

$$F_{56-123} = \frac{A_{123}}{A_{56}}F_{123-56}$$

y sustituir la ecuación anterior:

$$F_{56-123} = \frac{A_{123}}{A_{56}}(F_{123-456} - F_{123-4})$$

Separar segundo subíndice de  $F_{56-123}$  y despejar  $F_{56-1}$ :

$$F_{56-1} + F_{56-23} = \frac{A_{123}}{A_{56}}(F_{123-456} - F_{123-4})$$

$$F_{56-1} = \frac{A_{123}}{A_{56}} (F_{123-456} - F_{123-4}) - F_{56-23}$$

Pero  $F_{56-23}$  no se puede sacar de la gráfica, así que hay que tomar  $F_{23-456}$  y separar

$$F_{23-456} = F_{23-4} + F_{23-56}$$

para luego despejar:

$$F_{23-56} = F_{23-456} - F_{23-4}$$

Plantear la relación de reciprocidad y despejar:

$$A_{23}F_{23-56} = A_{56}F_{56-23}$$

$$F_{56-23} = \frac{A_{23}}{A_{56}} F_{23-56}$$

y sustituir la expresión anterior:

$$F_{56-23} = \frac{A_{23}}{A_{56}} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

y esto se sustituye en la ecuación para  $F_{56-1}$ :

$$F_{56-1} = \frac{A_{123}}{A_{56}} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_{23}}{A_{56}} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

Plantear la relación de reciprocidad y despejar:

$$A_{56}F_{56-1} = A_1F_{1-56}$$

$$F_{1-56} = \frac{A_{56}}{A_1} F_{56-1}$$

y sustituir la expresión anterior:

$$F_{1-56} = \frac{A_{56}}{A_1} \left[ \frac{A_{123}}{A_{56}} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_{23}}{A_{56}} (F_{23-456} - F_{23-4}) \right]$$

Simplificar:

$$F_{1-56} = \frac{A_{123}}{A_1} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_{23}}{A_1} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

Separar  $F_{1-56}$ :

$$F_{1-5} + F_{1-6} = \frac{A_{123}}{A_1} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_{23}}{A_1} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

Pero  $F_{1-5} = F_{1-6}$  por simetría, por lo que  $F_{1-5} + F_{1-6} = 2F_{1-6}$

$$2F_{1-6} = \frac{A_{123}}{A_1} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_{23}}{A_1} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

Finalmente dividir todo entre 2:

$$F_{1-6} = \frac{A_{123}}{2A_1} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_{23}}{2A_1} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

y expresar las áreas compuestas como sumas de las áreas elementales:

$$F_{1-6} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{2A_1} (F_{123-456} - F_{123-4}) - \frac{A_2 + A_3}{2A_1} (F_{23-456} - F_{23-4})$$

■

## V. MECANISMOS DE TRANSFERENCIA DE MASA

<b>COMPETENCIAS ESPECÍFICAS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Interpreta la ley de Fick de la difusión a partir de los elementos que la componen y su comportamiento.</li> <li>Determina la difusividad en mezclas binarias y multicomponentes, utilizando las correlaciones y gráficas correspondientes.</li> <li>Estima coeficientes de transferencia de masa con base en correlaciones empíricas.</li> </ul>		
<b>COMPETENCIAS GENÉRICAS</b>	<b>INSTRUMENTALES</b>	<b>INTERPERSONALES</b>	<b>SISTÉMICAS</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Habilidades para buscar, procesar y analizar información procedente de fuentes diversas.</li> <li>Capacidad de aprender y actualizarse permanentemente.</li> <li>Habilidades en el uso de las tecnologías de la información y de la comunicación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Capacidad de trabajo en equipo.</li> <li>Capacidad crítica y autocrítica.</li> <li>Compromiso ético.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Habilidad para trabajar en forma autónoma.</li> <li>Capacidad para identificar, plantear y resolver problemas.</li> <li>Compromiso con la preservación del medio ambiente.</li> <li>Compromiso con la calidad.</li> </ul>

### 5.1 Difusión

#### 5.1.1 Ley de Fick de la difusión

Como en el caso de la ley de Newton de la viscosidad y de la ley de Fourier de la conducción, se planteará una observación experimental de la relación entre las variables involucradas en la transferencia de masa, para luego generalizar esa observación a un nivel microscópico y deducir la ley de Fick de la difusión.

Considérese dos recipientes llenos de mezclas de dos gases A y B, con la misma presión total y temperatura\*, pero con diferentes concentraciones de cada gas, unidos por un tubo capilar recto (Figura 5.1).



Figura 5.1 Observación empírica de la ley de Fick.

En estado estable, se observa que la rapidez de transferencia de masa<sup>†</sup> ( $J_A$ , en mol/s) de la sustancia A a través del capilar es directamente proporcional al área  $A$  de sección transversal del capilar, directamente proporcional a la diferencia de concentraciones  $C_{A1} - C_{A2}$  de la sustancia A, e inversamente proporcional a la longitud  $L$  del capilar:

$$J_A \propto \frac{A(C_{A1} - C_{A2})}{L} \quad (5.1)$$

\* Nótese que al tratarse de gases ideales a la misma temperatura y presión, su concentración molar (mol/m<sup>3</sup>) es la misma. Para que la presión se mantenga constante, se debe transferir el mismo número de moléculas en cada dirección. Como la velocidad promedio molar  $\bar{v}^*$  será cero, no habrá un flujo molar neto en el capilar (éste es un caso de contradifusión equimolar).

† Aquí se emplea la mayúscula  $J_A$  para el flujo molar (mol/s) y la minúscula  $j_A$  para la densidad de flujo molar (mol/m<sup>2</sup>·s), para ser consistentes con las definiciones equivalentes dadas para transferencia de calor, donde la mayúscula  $Q$  representa el flujo de calor (J/s) y la minúscula  $q$  representa la densidad de flujo de calor (J/m<sup>2</sup>·s). Sin embargo, es importante señalar que en muchas referencias que abordan la transferencia de masa, se usa mayúscula para densidad de flujo molar, y minúscula para densidad de flujo másico.

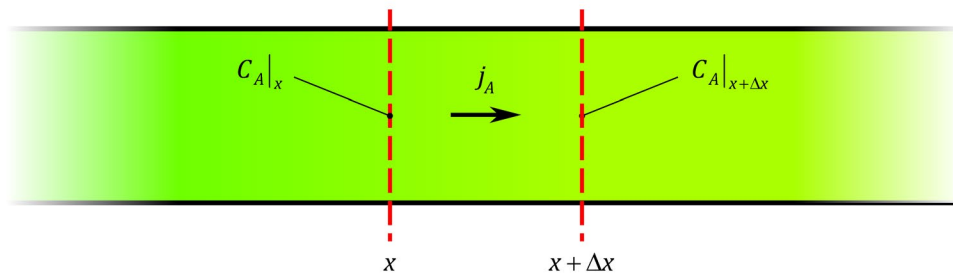
Se define ahora la **densidad de flujo molar por difusión**  $j_A$  como la rapidez de flujo molar dividida entre el área:

$$j_A \equiv \frac{J_A}{A} \quad (5.2)$$

Se puede ver inmediatamente que en el Sistema Internacional  $j_A$  está dada en mol/m<sup>2</sup>·s. Con esta definición, la observación empírica de la ley de Fick se simplifica a:

$$j_A \propto \frac{(C_{A1} - C_{A2})}{L} \quad (5.3)$$

Ahora se procede a examinar sólo un segmento del capilar, de longitud  $\Delta x$ , ubicado entre las posiciones  $x$  y  $x + \Delta x$ . La concentración de A en cada extremo de dicho segmento debe ser diferente (aunque sea muy pequeña dicha diferencia), ya que si fueran iguales no habría transferencia de masa. Dichas concentraciones se indican como  $C_A|_x$  y  $C_A|_{x+\Delta x}$ , respectivamente, y en este caso se está asumiendo que  $C_A|_x$  es mayor que  $C_A|_{x+\Delta x}$ , por la dirección en la que se está asumiendo que se transfiere el componente A.



**Figura 5.2** Deducción a nivel microscópico de la ley de Fick.

Extendiendo la observación anterior, se plantea que la densidad de flujo molar a través del segmento analizado del tubo capilar es directamente proporcional a la diferencia de concentración, e inversamente proporcional a la longitud del segmento:

$$j_A \propto \frac{C_A|_x - C_A|_{x+\Delta x}}{\Delta x} \quad (5.4)$$

Recordando una de las definiciones matemáticas de la primera derivada:

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5.5)$$

se puede reconocer inmediatamente la similitud, donde la función evaluada es la concentración. Sin embargo, es necesario reacomodar la ecuación 5.4 porque la definición de la derivada requiere que la función sea evaluada primero en  $x + \Delta x$  y que se le reste la función evaluada en  $x$ . Sacando un signo negativo enfrente de la fracción:

$$j_A \propto -\frac{C_A|_{x+\Delta x} - C_A|_x}{\Delta x} \quad (5.6)$$

Al tomar el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se obtiene:

$$j_A \propto -\frac{dC_A}{dx} \quad (5.7)$$

Finalmente, para cambiar el signo de proporcionalidad a una igualdad, es necesario introducir una constante de proporcionalidad:

$$j_A = -\mathcal{D}_{AB} \frac{dC_A}{dx} \quad (5.8)$$

donde  $\mathcal{D}_{AB}$  es una propiedad de la mezcla\* llamada **difusividad** (o coeficiente de difusión) y su unidad en el SI es m<sup>2</sup>/s.

La ecuación anterior fue deducida para el caso en el que sólo se transfiere masa en la dirección  $x$ . Generalizando, la transferencia puede transferir en cualquiera de las tres direcciones, dando lugar a tres densidades de flujo molar:

$$j_{A,x} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (5.9)$$

$$j_{A,y} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y} \quad (5.10)$$

$$j_{A,z} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} \quad (5.11)$$

donde se ha utilizado derivadas parciales ya que la concentración puede ser función de cualquiera de las tres coordenadas o incluso del tiempo. Ya que la densidad de flujo molar presenta tres componentes, en realidad corresponde a un vector  $\mathbf{j}_A$ , y las tres componentes de las ecuaciones 5.9 a 5.11 pueden expresarse empleando notación vectorial:

$$\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A \quad (5.12)$$

Esta última ecuación es la forma más compacta de la ley de Fick de la difusión, que se enuncia de la siguiente forma:

- ★ **Ley de Fick de la difusión:** La densidad de flujo molar por difusión es directamente proporcional al gradiente negativo de la concentración. La constante de proporcionalidad es una propiedad de la mezcla denominada *difusividad*.

La deducción anterior se planteó para el componente A, pero se puede obtener igualmente para el componente B, ya que en cualquier caso debe existir al menos dos componentes para que se haya transferencia de masa.

En gases, la difusividad aumenta al aumentar la temperatura y disminuye al aumentar la presión. De hecho, el producto  $\mathcal{D}_{AB}P$  se mantiene constante para gases a baja presión. En el caso de líquidos, la difusividad también aumenta con la temperatura, y prácticamente se mantiene inalterada al aumentar la presión, debido a la incompresibilidad de los líquidos.

#### 5.1.1.1 Ley de Fick en base molar

La ecuación obtenida en la sección anterior, es la ley de Fick en base molar:

\* En un sentido estricto,  $\mathcal{D}_{AB}$  es la difusividad de A en B. En el caso de sistemas multicomponente, en ocasiones se empleará la misma notación por simplicidad, aunque en realidad se refiere a  $\mathcal{D}_{A-m}$ , la difusividad de A en la mezcla.

$$\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A \quad (5.13)$$

Recordando la definición de fracción mol\*, dada en la Unidad 1,  $x_A = C_A / C$ , donde  $C$  es la concentración molar total, se tiene que  $C_A = x_A C$ . Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla (x_A C) \quad (5.14)$$

y si la concentración molar total es constante, se obtiene una de las formas alternativas más comunes de la ley de Fick:

$$\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} C \nabla x_A \quad (5.15)$$

### 5.1.2.2 Ley de Fick en base masa

Ahora bien, si la difusión se define respecto a la velocidad promedio másica, se obtiene la ley de Fick en base masa:

$$\mathbf{j}_A^{(m)} = -\mathcal{D}_{AB} \nabla \rho_A \quad (5.16)$$

Recordando la definición de la fracción masa,  $w_A = \rho_A / \rho$ , se tiene que  $\rho_A = w_A \rho$ , por lo que:

$$\mathbf{j}_A^{(m)} = -\mathcal{D}_{AB} \nabla (w_A \rho) \quad (5.17)$$

Si la concentración másica total (la densidad) es constante, se obtiene otra de las formas comunes de la ley de Fick:

$$\mathbf{j}_A^{(m)} = -\mathcal{D}_{AB} \rho \nabla w_A \quad (5.18)$$

## 5.1.2 Ecuación general de flujo

Una de las dificultades con la ley de Fick de la difusión, es que sólo toma en cuenta la transferencia de un componente (el componente A) sin considerar lo que ocurre con los demás componentes presentes. Esto es suficientemente válido en los casos de difusión en sólidos u otros medios estacionarios, pero es inadecuado para describir el comportamiento en casos donde más de un componente se transfiere o hay una velocidad global del fluido.

Por esta razón, la ecuación general de flujo es una ecuación que describe la rapidez con la que se transfiere el componente A, tomando en cuenta su gradiente de concentración y la transferencia de todos los demás componentes presentes.

### 5.1.2.1 Ecuación general de flujo en base molar

El movimiento de un componente puede deberse a difusión o a advección. De esta manera, se define la densidad de flujo molar total del componente A ( $\mathbf{n}_A$ ) como la suma de las densidades de flujo por difusión y por advección:

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{j}_A + C_A \mathbf{v}^* \quad (5.19)$$

flujo molar
flujo molar
flujo molar  
total
por difusión
por advección

Ahora bien, la velocidad molar promedio  $\mathbf{v}^*$  está definida como:

\* Recuérdese que es común emplear  $x_A$  para la fracción mol en fase líquida y  $y_A$  para la fracción mol en fase gas.

$$\mathbf{v}^* = \sum x_i \mathbf{v}_i \quad (5.20)$$

donde la sumatoria es para todos los componentes presentes en el sistema. Recordando la definición de la fracción mol,  $x_i = C_i / C$ , y definiendo la densidad de flujo molar del componente  $i$  como  $\mathbf{n}_i = C_i \mathbf{v}_i$ , se puede transformar la velocidad promedio molar:

$$\mathbf{v}^* = \sum x_i \mathbf{v}_i = \sum \frac{C_i}{C} \mathbf{v}_i = \frac{1}{C} \sum C_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{C} \sum \mathbf{n}_i \quad (5.21)$$

Sustituyendo esta velocidad promedio en la densidad de flujo molar total, junto con la ley de Fick en base molar,  $\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A$ :

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{j}_A + C_A \mathbf{v}^* \Rightarrow \mathbf{n}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A + C_A \left( \frac{1}{C} \sum \mathbf{n}_i \right) \quad (5.22)$$

obteniendo la ecuación general de flujo en base molar:

$$\mathbf{n}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A + \frac{C_A}{C} \sum \mathbf{n}_i \quad (5.23)$$

Esta ecuación, que puede considerarse una forma ampliada de la ley de Fick, establece la densidad de flujo molar del componente A en términos de su gradiente de concentración (difusión) y de la densidad de flujo de todos los demás componentes (advección).

### 5.1.2.1 Ecuación general de flujo en base masa

Nuevamente, se define la densidad de flujo másico total del componente A,  $\mathbf{n}_A^{(m)}$  como la suma de las densidades de flujo por difusión y por advección:

$$\mathbf{n}_A^{(m)} = \mathbf{j}_A^{(m)} + \rho_A \mathbf{v} \quad (5.24)$$

total            difusión    advección

La velocidad másica promedio  $\mathbf{v}$  está definida como:

$$\mathbf{v} = \sum w_i \mathbf{v}_i \quad (5.25)$$

donde la sumatoria es para todos los componentes presentes en el sistema. Recordando la definición de la fracción masa,  $w_i = \rho_i / \rho$ , y definiendo la densidad de flujo másico del componente  $i$  como  $\mathbf{n}_i^{(m)} = \rho_i \mathbf{v}_i$ , se puede transformar la velocidad promedio másica:

$$\mathbf{v} = \sum w_i \mathbf{v}_i = \sum \frac{\rho_i}{\rho} \mathbf{v}_i = \frac{1}{\rho} \sum \rho_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{\rho} \sum \mathbf{n}_i^{(m)} \quad (5.26)$$

Sustituyendo esta velocidad promedio en la densidad de flujo molar total, junto con la ley de Fick en base masa,  $\mathbf{j}_A^{(m)} = -\mathcal{D}_{AB} \nabla \rho_A$ :

$$\mathbf{n}_A^{(m)} = \mathbf{j}_A^{(m)} + \rho_A \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{n}_A^{(m)} = -\mathcal{D}_{AB} \nabla \rho_A + \rho_A \left( \frac{1}{\rho} \sum \mathbf{n}_i^{(m)} \right) \quad (5.27)$$

obteniendo la ecuación general de flujo en base masa:

$$\mathbf{n}_A^{(m)} = -\mathcal{D}_{AB} \nabla \rho_A + \frac{\rho_A}{\rho} \sum \mathbf{n}_i^{(m)} \quad (5.28)$$

### 5.1.3 Tres casos de transferencia de masa en sistema binario

Considérese la ecuación general de flujo en base molar (Ecuación 5.23) escrita para el caso de un sistema binario:

$$\mathbf{n}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A + \frac{C_A}{C} (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) \quad (5.29)$$

Ya que el componente A es el componente de interés, no hay duda que se está transfiriendo. Sin embargo, hay tres casos que se pueden considerar, dependiendo de qué es lo que esté ocurriendo con el componente B: difusión unimolecular, contradifusión equimolar y contradifusión no equimolar. A continuación se describe qué ocurre con la ecuación general de flujo en cada uno de estos casos.

#### 5.1.3.1 Difusión unimolecular (DUM)

En este caso, el componente B no se transfiere, sino que únicamente representa un medio estacionario a través del cual se está transfiriendo el componente A. Entonces, la densidad de flujo molar de B es cero ( $\mathbf{n}_B = 0$ ) y se puede ver que la Ecuación 5.29 se simplifica a:

$$\mathbf{n}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A + \frac{C_A}{C} \mathbf{n}_A \quad (5.30)$$

Como se puede ver, la densidad de flujo molar del componente A aparece dos veces en la ecuación. El segundo término del lado derecho se puede pasar al lado izquierdo, para sacar factor común y despejar  $\mathbf{n}_A$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A - \frac{C_A}{C} \mathbf{n}_A &= -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A & \rightarrow & \quad \mathbf{n}_A \left(1 - \frac{C_A}{C}\right) = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A & \rightarrow \\ \mathbf{n}_A &= \frac{-\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A}{1 - C_A / C} & \text{(para DUM)} & \quad & (5.31) \end{aligned}$$

#### 5.1.3.2 Contradifusión equimolar (CDEM)

En este caso, el componente B sí se está transfiriendo, en igual número de moles que el componente A, pero en dirección opuesta. Entonces, la densidad de flujo molar de B es numéricamente igual a la de A, pero de signo opuesto ( $\mathbf{n}_B = -\mathbf{n}_A$ ). Al sustituir en la Ecuación 5.29 se anula todo el último término del lado derecho:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_A &= -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A + \frac{C_A}{C} (\mathbf{n}_A - \mathbf{n}_A) \\ \mathbf{n}_A &= -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A & \text{(para CDEM)} & \quad & (5.32) \end{aligned}$$

Comparando con la ecuación general de flujo para el caso de difusión unimolecular (Ecuación 5.31) se puede apreciar que la contradifusión equimolar es “matemáticamente más simple” al no tener el término  $1 - C_A / C$  en el denominador. Más aún, comparando con la Ecuación 5.12, se puede ver que la ecuación general de flujo para contradifusión equimolar es idéntica a la ley de Fick de la difusión.

### 5.1.3.3 Contradifusión no equimolar

Esta situación representa un grupo de casos que no siempre se abordan en los libros de transferencia de masa. En la contradifusión no equimolar, tanto el componente A como el componente B se están transfiriendo, pero no en una relación uno a uno como en la contradifusión equimolar.

En este caso, no es posible dar una simplificación *a priori* de la ecuación general de flujo, sino que dependerá de la situación particular que se esté analizando. Será necesario establecer una equivalencia para la densidad de flujo molar del componente B ( $\mathbf{n}_B$ ) en función, o como un múltiplo, de la densidad de flujo molar del componente A ( $\mathbf{n}_A$ ), para luego proceder a despejar  $\mathbf{n}_A$  como se hizo en el caso de la difusión unimolecular.

### 5.1.3.4 Simplificación para el caso de sistemas diluidos

Considérese de nuevo la ecuación general de flujo, simplificada para el caso de difusión unimolecular (Ecuación 5.31):

$$\mathbf{n}_A = \frac{-\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A}{1 - C_A / C} \quad (\text{DUM})$$

Si la concentración de A es suficientemente baja, comparada con la concentración molar total  $C$ , la relación  $C_A / C$  va a ser pequeña, y despreciable comparada con el término 1 en el denominador. Por lo tanto:

$$1 - \frac{C_A}{C} \approx 1$$

Así que la ecuación general de flujo se simplifica a:

$$\mathbf{n}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A \quad (\text{sistema diluido}) \quad (5.33)$$

La conclusión principal es que, matemáticamente hablando, un sistema diluido se comporta igual que un sistema en contradifusión equimolar.

## 5.1.4 Algunos métodos de estimación para difusividad

### 5.1.4.1 Teoría cinética de Chapman-Enskog (difusividad en gases a baja presión)

Tiene esencialmente la misma base teórica que se utiliza para estimar la viscosidad o conductividad térmica de un gas. En este caso, se asume un modelo de Lennard-Jones para la energía potencial de interacción ( $\varphi_{AB}$ ) entre una molécula de A y una de B:

$$\varphi_{AB}(r) = 4\epsilon_{AB} \left[ \left( \frac{\sigma_{AB}}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_{AB}}{r} \right)^6 \right] \quad (5.34)$$

donde la energía característica de interacción  $\epsilon_{AB}$  y el diámetro de colisión de interacción  $\sigma_{AB}$  se obtienen a partir de los valores de las sustancias puras\* (Tabla 5.1).

\* Se recomienda que los datos de ambas sustancias sean de la misma fuente bibliográfica.

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B) \quad \frac{\varepsilon_{AB}}{\kappa} = \left( \frac{\varepsilon_A}{\kappa} \cdot \frac{\varepsilon_B}{\kappa} \right)^{0.5} \quad (5.35)$$

**Tabla 5.1** Parámetros de Lennard-Jones y otras propiedades para difusividad.

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\varepsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$\tilde{V}_c$	$\mu_{dip}$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)	(debye)
H <sub>2</sub>	2.016	2.827	59.7	33.2	13.0	65.1	0.0
He	4.003	2.551	10.22	5.19	2.27	57.4	0.0
Ne	20.183	2.820	32.8	44.4	27.6	41.6	0.0
Ar	39.948	3.542	93.3	150.8	48.7	74.9	0.0
Kr	83.800	3.655	178.9	209.4	55.0	91.2	0.0
Xe	131.300	4.047	231.0	289.7	58.4	118.4	0.0
aire	28.964	3.711	78.6	132.4	37.0	86.7	0.0
N <sub>2</sub>	28.013	3.798	71.4	126.2	33.9	89.8	0.0
O <sub>2</sub>	31.999	3.467	106.7	154.6	50.4	73.4	0.0
H <sub>2</sub> O	18.015	2.649	356	647.3	221.2	57.1	1.8
CO	28.010	3.690	91.7	132.9	35.0	93.2	0.1
CO <sub>2</sub>	44.010	3.941	195.2	304.1	73.8	93.9	0.0
COS	60.070	4.130	336.0	378.8	63.5	136.3	0.7
CS <sub>2</sub>	76.131	4.483	467.0	552	79.0	160	0.0
C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	52.035	4.361	348.6	400	59.8	-	0.2
NH <sub>3</sub>	17.031	2.900	558.3	405.5	113.5	72.5	1.5
NO	30.006	3.492	116.7	180	64.8	57.7	0.2
N <sub>2</sub> O	44.013	3.828	232.4	309.6	72.4	97.4	0.2
SO <sub>2</sub>	64.063	4.112	335.4	430.8	78.8	122.2	1.6
F <sub>2</sub>	37.997	3.357	112.6	144.3	52.2	66.3	0.0
Cl <sub>2</sub>	70.906	4.217	316.0	416.9	79.8	123.8	0.0
Br <sub>2</sub>	159.808	4.296	507.9	588	103	127.2	0.2
I <sub>2</sub>	253.82	5.160	474.2	819	117	155.0	1.3
HF	20.006	3.148	330.0	461	64.8	69.2	1.9
HCl	36.461	3.339	344.7	324.7	83.1	80.9	1.1
HBr	80.912	3.353	449.0	363.2	85.5	-	0.8
HI	127.912	4.211	288.7	424.0	83.1	132.7	0.5
HCN	27.026	3.630	569.1	456.7	53.9	138.8	3.0
H <sub>2</sub> S	34.080	3.623	301.1	373.2	89.4	98.6	0.9
SF <sub>6</sub>	146.054	5.128	222.1	318.7	37.6	198.8	0.0
UF <sub>6</sub>	352.018	5.967	236.8	505.8	46.6	250.0	0.0
Hg	200.61	2.969	750.0	1765	1510	42.7	0.0
CH <sub>4</sub>	16.043	3.758	148.6	190.4	46.0	99.2	0.0
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30.070	4.443	215.7	305.4	48.8	148.3	0.0
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	28.054	4.163	224.7	282.4	50.4	130.4	0.0
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	26.038	4.033	231.8	308.3	61.4	112.7	0.0

Sustancia	$M$	$\sigma$	$\varepsilon / \kappa$	$T_c$	$P_c$	$\tilde{V}_c$	$\mu_{dip}$
	(g/mol)	(Å)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)	(debye)
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44.094	5.118	237.1	369.8	42.5	203	0.0
CH <sub>2</sub> =CH-CH <sub>3</sub>	42.081	4.678	298.9	364.9	46.0	181	0.4
CH≡C-CH <sub>3</sub>	40.065	4.761	251.8	402.4	56.3	164	0.7
n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	4.687	531.4	425.2	38.0	255	0.0
iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	58.124	5.278	330.1	408.2	36.5	263	0.1
n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	72.151	5.784	341.1	469.7	33.7	304	0.0
C(CH <sub>3</sub> ) <sub>4</sub>	72.151	6.464	193.4	433.8	32.0	303	0.0
n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	86.178	5.949	399.3	507.5	30.1	370	0.0
ciclopropano	42.081	4.807	248.9	397.8	54.9	163	0.0
ciclohexano	84.162	6.182	297.1	553.5	40.7	308	0.3
benceno	78.114	5.349	412.3	562.2	48.9	259	0.0
CH <sub>3</sub> -OH	32.042	3.626	481.8	512.6	80.9	118.0	1.7
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	46.069	4.530	362.6	513.9	61.4	167.1	1.7
CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	58.080	4.600	560.2	508.1	47.0	209	2.9
CH <sub>3</sub> -O-CH <sub>3</sub>	46.069	4.307	395.0	400.0	52.4	178	1.3
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -O-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	74.123	5.678	313.8	466.7	36.4	280	1.3
CH <sub>3</sub> Cl	50.488	4.182	350.0	416.3	67.0	138.9	1.9
CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	84.933	4.898	356.3	510	63.0	193	1.8
CHCl <sub>3</sub>	119.378	5.389	340.2	536.4	53.7	238.9	1.1
CCl <sub>4</sub>	153.823	5.947	322.7	556.4	45.6	275.9	0.0
CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	120.914	5.116	280.0	385.0	41.4	216.7	0.5
SiH <sub>4</sub>	32.122	4.084	207.6	269.7	48.4	-	0.0
SiF <sub>4</sub>	104.09	4.880	171.9	259.0	37.2	-	0.0

Cuando se desconoce  $\sigma$  y  $\varepsilon / \kappa$ , se pueden estimar con las correlaciones de la Tabla 5.2.

**Tabla 5.2** Estimación de los parámetros de Lennard-Jones.

punto crítico (preferible)	punto crítico (alternativa)	punto de ebullición	punto de fusión
$\sigma = 0.841\tilde{V}_c^{1/3}$	$\sigma = 2.44(T_c / P_c)^{1/3}$	$\sigma = 1.166\tilde{V}_b^{1/3}$	$\sigma = 1.222\tilde{V}_m^{1/3}$
$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 0.77T_c$	$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 0.77T_c$	$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 1.15T_b$	$\frac{\varepsilon}{\kappa} = 1.92T_m$

( $T_c$ ,  $T_b$  y  $T_m$  en K,  $P_c$  en bar,  $\tilde{V}_c$ ,  $\tilde{V}_b$  y  $\tilde{V}_m$  en cm<sup>3</sup>/mol)

La ecuación para la difusividad es:

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.002662T^{1.5}}{PM_{AB}^{0.5}\sigma_{AB}^2\Omega_{\mathcal{D}}} \quad (5.36)$$

donde  $\mathcal{D}_{AB}$  es la difusividad en  $\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $T$  es la temperatura en K,  $P$  es la presión en bar y  $M_{AB}$  es la media armónica de los pesos moleculares de ambos componentes:

$$M_{AB} = \frac{2M_A M_B}{M_A + M_B} \quad (5.37)$$

La integral de colisión  $\Omega_{\mathcal{D}}$  (Tabla 5.3) depende de la temperatura adimensional  $T^*$ , definida ahora como:

$$T^* = \frac{\kappa T}{\varepsilon_{AB}} \quad \text{o bien} \quad T^* = \frac{T}{\varepsilon_{AB} / \kappa} \quad (5.38)$$

**Tabla 5.3** Integral de colisión para difusividad (Lennard-Jones).

$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$
0.30	2.6502	1.00	1.4405	1.70	1.1412	2.8	0.9681	4.2	0.8753	12	0.7201
0.35	2.4705	1.05	1.4067	1.75	1.1287	2.9	0.9588	4.3	0.8708	14	0.7026
0.40	2.3164	1.10	1.3758	1.80	1.1168	3.0	0.9500	4.4	0.8664	16	0.6879
0.45	2.1832	1.15	1.3474	1.85	1.1056	3.1	0.9418	4.5	0.8622	18	0.6753
0.50	2.0675	1.20	1.3212	1.90	1.0950	3.2	0.9341	4.6	0.8581	20	0.6643
0.55	1.9664	1.25	1.2971	1.95	1.0849	3.3	0.9268	4.7	0.8541	25	0.6416
0.60	1.8776	1.30	1.2747	2.0	1.0754	3.4	0.9199	4.8	0.8503	30	0.6236
0.65	1.7993	1.35	1.2538	2.1	1.0576	3.5	0.9133	4.9	0.8467	35	0.6087
0.70	1.7299	1.40	1.2344	2.2	1.0413	3.6	0.9071	5.0	0.8431	40	0.5962
0.75	1.6680	1.45	1.2163	2.3	1.0265	3.7	0.9012	6.0	0.8128	45	0.5853
0.80	1.6127	1.50	1.1993	2.4	1.0129	3.8	0.8956	7.0	0.7895	50	0.5758
0.85	1.5630	1.55	1.1834	2.5	1.0004	3.9	0.8902	8.0	0.7707	60	0.5596
0.90	1.5181	1.60	1.1685	2.6	0.9888	4.0	0.8850	9.0	0.7551	80	0.5350
0.95	1.4774	1.65	1.1544	2.7	0.9781	4.1	0.8801	10	0.7419	100	0.5167

Valores calculados con las correlaciones de Neufeld citadas en Poling (2000).

**EJEMPLO 5.1**

**82400.24**

Estimar la difusividad del vapor de fenol en dióxido de carbono gaseoso a 80 °C y 1.5 bar, aplicando la teoría cinética de Chapman-Enskog.

**SOLUCIÓN**

Los compuestos se identifican como A – fenol y B – dióxido de carbono. Para el fenol, se utilizarán los datos del punto crítico para estimar el diámetro de colisión y la energía característica. Del Apéndice A de Poling (2000) se obtienen los siguientes datos del fenol:  $M = 94.113 \text{ g/mol}$ ,  $T_c = 694.25 \text{ K}$ ,  $\tilde{V}_c = 229 \text{ cm}^3/\text{mol}$ .

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.841 \tilde{V}_c^{1/3} \\ \sigma_A &= 0.841(229)^{1/3} \\ \sigma_A &= 5.145 \text{ \AA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\kappa} &= 0.77 T_c \\ \frac{\varepsilon_A}{\kappa} &= 0.77(694.25) \\ \frac{\varepsilon_A}{\kappa} &= 534.57 \text{ K} \end{aligned}$$

Respecto al dióxido de carbono, sus datos se obtienen directamente de la tabla:

$$\begin{aligned} M_B &= 44.01 \text{ g/mol} \\ \sigma_B &= 3.941 \text{ \AA} \\ \frac{\varepsilon_B}{\kappa} &= 195.2 \text{ K} \end{aligned}$$

Primero se calcula la media armónica del peso molecular:

$$M_{AB} = \frac{2M_A M_B}{M_A + M_B}$$

$$M_{AB} = \frac{2(94.113)(44.01)}{94.113 + 44.01}$$

$$M_{AB} = 59.97 \text{ g/mol}$$

Luego se calculan los parámetros combinados  $\sigma_{AB}$  y  $\epsilon_{AB} / \kappa$ :

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B)$$

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(5.145 + 3.941)$$

$$\sigma_{AB} = 4.543 \text{ \AA}$$

$$\frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} = \left( \frac{\epsilon_A}{\kappa} \cdot \frac{\epsilon_B}{\kappa} \right)^{0.5}$$

$$\frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} = (534.57 \times 195.2)^{0.5}$$

$$\frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} = 323.03 \text{ K}$$

Se calcula la temperatura adimensional para obtener la integral de colisión interpolando en la tabla.

$$T^* = \frac{T}{\epsilon_{AB} / \kappa}$$

$$T^* = \frac{353.15}{323.03} = 1.093$$

$$\Omega_{\mathcal{D}} = 1.3801$$

Finalmente se sustituye en la ecuación para la difusividad:

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.002662T^{1.5}}{PM_{AB}^{0.5}\sigma_{AB}^2\Omega_{\mathcal{D}}}$$

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.002662(353.15)^{1.5}}{(1.5)(59.97)^{0.5}(4.543)^2(1.3801)}$$

$$\mathcal{D}_{AB} = 0.0534 \text{ cm}^2/\text{s}$$

■

### 5.1.4.2 Método de Fuller (difusividad en gases a baja presión)

Este es un método bastante simple que da razonablemente buenas predicciones de difusividad:

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.00143T^{1.75}}{PM_{AB}^{0.5} \left[ (\Sigma v_A)^{1/3} + (\Sigma v_B)^{1/3} \right]^2} \quad (5.39)$$

donde  $\mathcal{D}_{AB}$  es la difusividad en  $\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $T$  es la temperatura en K,  $P$  es la presión en bar y  $M_{AB}$  es la media armónica de los pesos moleculares de ambos componentes:

$$M_{AB} = \frac{2M_A M_B}{M_A + M_B} \quad (5.40)$$

Los valores de  $\Sigma v$  se obtienen por contribución de grupos de acuerdo a la Tabla 5.4. Para algunas moléculas simples se recomienda emplear los valores especiales indicados en la Tabla 5.5.

**Tabla 5.4** Contribuciones de grupo para volúmenes moleculares de difusión.

ÁTOMO	$v$	ÁTOMO	$v$	ÁTOMO	$v$	ÁTOMO	$v$
C	15.9	H	2.31	O	6.11	N	4.54
F	14.7	Cl	21.0	Br	21.9	I	29.8
S	22.9	Cierre de anillo					-18.3

**Tabla 5.5** Volúmenes moleculares de difusión para algunas moléculas simples.

MOLÉCULA	$\Sigma v$	MOLÉCULA	$\Sigma v$	MOLÉCULA	$\Sigma v$	MOLÉCULA	$\Sigma v$
H <sub>2</sub>	6.12	He	2.67	CO	18.0	Cl <sub>2</sub>	38.4
D <sub>2</sub>	6.84	Ne	5.98	CO <sub>2</sub>	26.9	Br <sub>2</sub>	69.0
N <sub>2</sub>	18.5	Ar	16.2	N <sub>2</sub> O	35.9	SO <sub>2</sub>	41.8
O <sub>2</sub>	16.3	Kr	24.5	NH <sub>3</sub>	20.7	SF <sub>6</sub>	71.3
Aire	19.7	Xe	32.7	H <sub>2</sub> O	13.1	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	114.8

**EJEMPLO 5.2****82400.24**

Estimar la difusividad del vapor de fenol en dióxido de carbono gaseoso a 80 °C y 1.5 bar, aplicando el método de Fuller.

**SOLUCIÓN**

Los compuestos se identifican como A – fenol y B – dióxido de carbono. El peso molecular del fenol es  $M = 94.113$  g/mol.

Para el fenol, se obtiene  $\Sigma v_A$  por contribución de grupos:

Grupo	$n$	$v$	$n \times v$
carbono	6	15.9	95.4
hidrógeno	6	2.31	13.86
oxígeno	1	6.11	6.11
anillo aromático	1	-18.3	-18.3
SUMA $\Sigma v_A =$			<b>97.07</b>

y para el dióxido de carbono, se emplea directamente el valor recomendado en la tabla, por lo que  $\Sigma v_B = 26.9$ . Se sustituye en la ecuación del método para obtener la difusividad buscada:

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.00143T^{1.75}}{PM_{AB}^{0.5} \left[ (\Sigma v_A)^{1/3} + (\Sigma v_B)^{1/3} \right]^2}$$

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.00143(353.15)^{1.75}}{(1.5)(59.97)^{0.5} \left[ (97.07)^{1/3} + (26.9)^{1/3} \right]^2}$$

$$\mathcal{D}_{AB} = 0.0614 \text{ cm}^2/\text{s}$$

■

### 5.1.4.3 Método de Wilke para sistemas multicomponente (difusividad en gases a baja presión)

Para verdaderas mezclas multicomponentes, la difusividad de cada componente en la mezcla depende de las interacciones de todos los componentes. El método de Wilke da resultados aproximados pero satisfactorios en muchos casos. La difusividad del componente 1 en la mezcla ( $\mathcal{D}_{1-m}$ ) se estima a partir de la difusividad del componente 1 en cada uno de los otros componentes ( $\mathcal{D}_{1-2}$ ,  $\mathcal{D}_{1-3}$ , etcétera) de acuerdo a la ecuación:

$$\mathcal{D}_{1-m} = \frac{1}{y'_2 / \mathcal{D}_{1-2} + y'_3 / \mathcal{D}_{1-3} + \dots + y'_n / \mathcal{D}_{1-n}} \quad (5.41)$$

con ecuaciones similares para la difusividad de los demás componentes de la mezcla. Las fracciones mol de cada componente que se emplean en la ecuación son las fracciones equivalentes en base libre del componente 1, dadas por:

$$y'_i = \frac{y_i}{y_2 + y_3 + \dots + y_n} = \frac{y_i}{1 - y_1} \quad (5.42)$$

**EJEMPLO 5.3**

En el buceo de profundidad, generalmente se necesita respirar mezclas de gases diferentes al aire, debido a los efectos narcóticos del nitrógeno a alta presión. Un tipo de mezcla frecuentemente empleada, el trimix, está formada de oxígeno, helio y nitrógeno en determinadas proporciones. Calcular la difusividad a 20 °C y 1 atm del oxígeno en trimix 15/55 (15% O<sub>2</sub>, 55% He, 30% N<sub>2</sub>), sabiendo que a esa temperatura  $\mathcal{D}_{\text{O}_2\text{-N}_2} = 0.22 \text{ cm}^2/\text{s}$  y  $\mathcal{D}_{\text{O}_2\text{-He}} = 0.70 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Comparar con la difusividad del oxígeno en aire,  $\mathcal{D}_{\text{O}_2\text{-aire}} = 0.196 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

**SOLUCIÓN**

Se identificarán los componentes con número: **1** = O<sub>2</sub>, **2** = He, **3** = N<sub>2</sub>. Por lo tanto, las fracciones mol dadas en el enunciado son:

$$y_1 = 0.15 \quad y_2 = 0.55 \quad y_3 = 0.30$$

Primero, hay que calcular las fracciones mol en base libre del componente 1:

$$y'_2 = \frac{y_2}{1 - y_1} = \frac{0.55}{1 - 0.15} = 0.647$$

$$y'_3 = \frac{y_3}{1 - y_1} = \frac{0.30}{1 - 0.15} = 0.353$$

La difusividad del oxígeno en la mezcla se calcula con:

$$\mathcal{D}_{1-m} = \frac{1}{\frac{y'_2}{\mathcal{D}_{1-2}} + \frac{y'_3}{\mathcal{D}_{1-3}}}$$

donde las difusividades del oxígeno en cada uno de los otros componentes son:

$$\mathcal{D}_{1-2} = \mathcal{D}_{\text{O}_2\text{-He}} = 0.70 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\mathcal{D}_{1-3} = \mathcal{D}_{\text{O}_2\text{-N}_2} = 0.22 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Entonces, sustituyendo:

$$\mathcal{D}_{1-m} = \frac{1}{\frac{0.647}{0.70 \text{ cm}^2/\text{s}} + \frac{0.353}{0.22 \text{ cm}^2/\text{s}}} = 0.395 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Comparando, se ve que la difusividad del oxígeno en el trimix es prácticamente el doble que la del oxígeno en aire. ■

#### 5.1.4.4 Método de estados correspondientes de Takahashi (difusividad en gases a alta presión)

No existe un valor específico de presión a partir del cual se considere "alta". Normalmente los métodos para gases a baja presión comienzan a mostrar desviaciones significativas a presiones de 10 atm o mayores. A diferencia de los gases a baja presión, a alta presión la difusividad sí depende de la composición.

Los métodos para gases a alta presión generalmente usan como base los datos a *baja presión* (indicado aquí con un superíndice \*), a la *misma temperatura* del sistema. Es común que esta baja presión se tome como 1 bar ó 1 atm.

Las propiedades reducidas se calculan empleando las propiedades pseudocríticas de la mezcla, obtenidas con la fracción mol y la propiedad crítica correspondiente de cada componente puro:

$$P_{c,AB} = y_A P_{c,A} + y_B P_{c,B} \quad (5.43)$$

$$T_{c,AB} = y_A T_{c,A} + y_B T_{c,B} \quad (5.44)$$

La relación entre el producto  $\mathcal{D}_{AB}P$  y su correspondiente valor a baja presión ( $\mathcal{D}_{AB}P$ )\* está dado en función de las condiciones reducidas de acuerdo a la Figura 5.3.

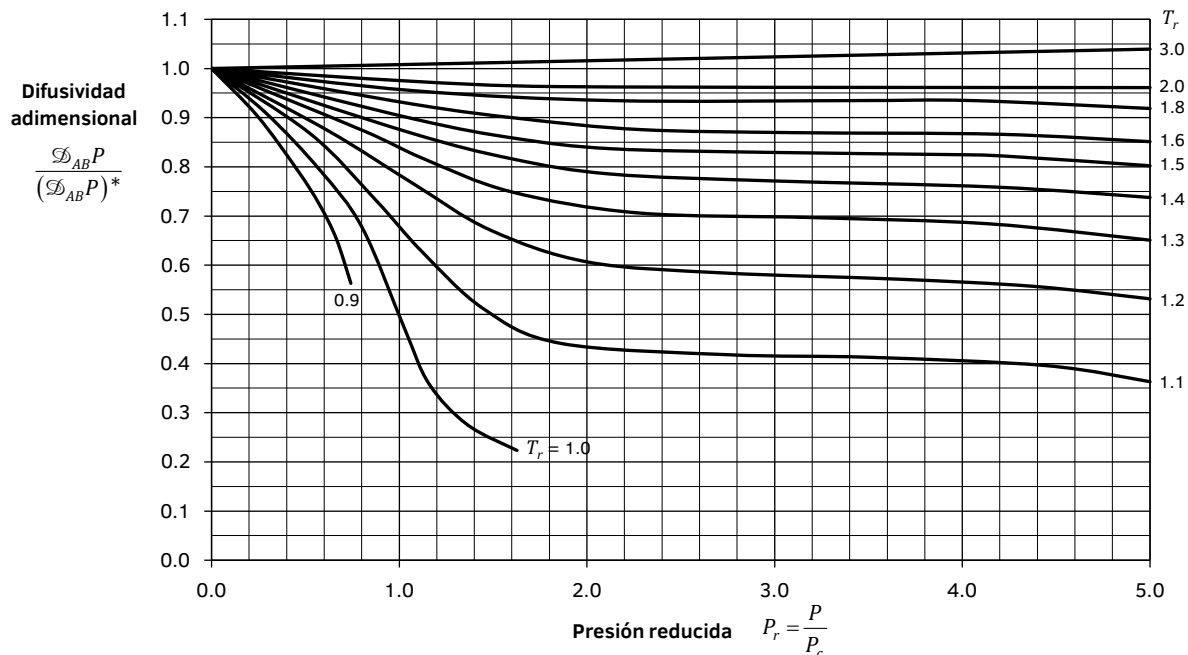
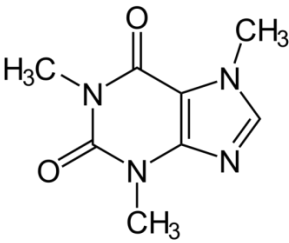


Figura 5.3 Diagrama de estados correspondientes para difusividad.

#### EJEMPLO 5.4

La cafeína es un alcaloide (del grupo de las xantinas) de sabor amargo, estimulante del sistema nervioso central, y relacionado químicamente con la adenina y la guanina (bases del ADN y ARN). Muchas bebidas contienen cafeína, incluyendo el café y el té negro. Uno de los métodos para extraer la cafeína de los granos de café es mediante dióxido de carbono a alta presión.

CAFEÍNA	Fórmula molecular	$C_8H_{10}N_4O_2$
	Número CAS	58-08-2
	Peso molecular	194.19 g/mol
	Punto de fusión	238 °C
	Punto de ebullición	N/D (sublima a 178 °C)
	Temperatura crítica	N/D
	Presión crítica	N/D
	Volumen molar crítico	N/D
	Densidad de sólido (18 °C)	1.23 g/cm <sup>3</sup>
	Solubilidad en 100 g de agua	2.1 g

N/D = no disponible.

- (A) Estimar la difusividad de la cafeína en  $CO_2$  a 400 K y 1 bar, empleando el método de Chapman-Enskog.  
 (B) Estimar la difusividad de la cafeína en  $CO_2$  a 400 K y 100 bar, empleando el método de Takahasi. Asumir que las propiedades pseudocríticas son iguales a las del  $CO_2$  puro (válido si la concentración de cafeína es baja).

#### SOLUCIÓN

(A) **Difusividad a baja presión:** Difusividad del vapor de cafeína a 1 bar y 400 K, aplicando la teoría cinética de Chapman-Enskog.

Dado que se no se tiene datos del punto crítico ni del punto de ebullición de la cafeína, pero sí se tiene su punto de fusión,

se usará éste para estimar los parámetros de Lennard-Jones, aprovechando que se conoce la densidad de la cafeína sólida (asumiendo que su densidad no cambie mucho entre la temperatura dada y el punto de fusión). Entonces, su volumen molar de sólido sería:

$$\tilde{V}_m = \frac{M}{\rho} = \frac{194.1 \text{ g/mol}}{1.23 \text{ g/cm}^3} = 157.88 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

y sus parámetros de Lennard-Jones:

$$\begin{aligned} \sigma &= 1.222\tilde{V}_m^{1/3} \\ \sigma_A &= 1.222(157.88)^{1/3} \\ \sigma_A &= 6.605 \text{ \AA} \\ \frac{\epsilon}{\kappa} &= 1.92T_m \\ \frac{\epsilon_A}{\kappa} &= 1.92(511.15 \text{ K}) \\ \frac{\epsilon_A}{\kappa} &= 981.408 \text{ K} \end{aligned}$$

Respecto al dióxido de carbono, sus datos se obtienen directamente de la tabla:

$$\begin{aligned} M_B &= 44.01 \text{ g/mol} \\ \sigma_B &= 3.941 \text{ \AA} \\ \frac{\epsilon_B}{\kappa} &= 195.2 \text{ K} \end{aligned}$$

Primero se calcula la media armónica del peso molecular:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2M_A M_B}{M_A + M_B} \\ M_{AB} &= \frac{2(194.19)(44.01)}{194.19 + 44.01} \\ M_{AB} &= 71.757 \text{ g/mol} \end{aligned}$$

Luego se calculan los parámetros combinados  $\sigma_{AB}$  y  $\epsilon_{AB} / \kappa$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} &= \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B) \\ \sigma_{AB} &= \frac{1}{2}(6.605 + 3.941) \\ \sigma_{AB} &= 5.273 \text{ \AA} \\ \frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} &= \left( \frac{\epsilon_A}{\kappa} \cdot \frac{\epsilon_B}{\kappa} \right)^{0.5} \\ \frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} &= (981.408 \times 195.2)^{0.5} \\ \frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} &= 437.69 \text{ K} \end{aligned}$$

Se calcula la temperatura adimensional para obtener la integral de colisión interpolando en la tabla.

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{T}{\epsilon_{AB} / \kappa} \\ T^* &= \frac{400}{437.69} = 0.9139 \end{aligned}$$

$$\Omega_{\mathcal{D}} = 1.4984$$

Finalmente se sustituye en la ecuación para la difusividad:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{AB} &= \frac{0.002662T^{1.5}}{PM_{AB}^{0.5}\sigma_{AB}^2\Omega_{\mathcal{D}}} \\ \mathcal{D}_{AB} &= \frac{0.002662(400)^{1.5}}{(1)(71.757)^{0.5}(5.273)^2(1.4984)} \\ \mathcal{D}_{AB} &= 0.0603 \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

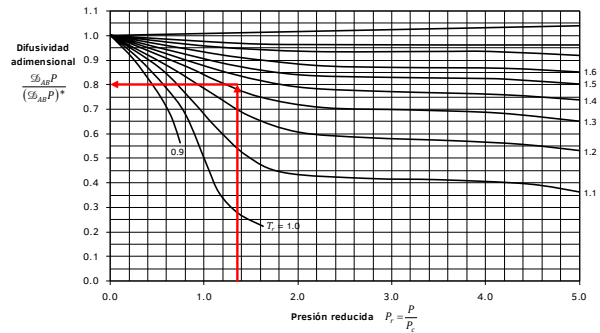
(B) Difusividad a alta presión: Difusividad del vapor de cafeína a 100 bar y 400 K, usando el método de Takahashi.

Primero se calcula la temperatura reducida y la presión reducida, empleando las propiedades críticas del dióxido de carbono:

$$T_r = \frac{T}{T_c} = \frac{400 \text{ K}}{304.1 \text{ K}} = 1.315$$

$$P_r = \frac{P}{P_c} = \frac{100 \text{ bar}}{73.8 \text{ bar}} = 1.355$$

Con estos datos se usa el diagrama de estados correspondientes para difusividad:



De la gráfica se obtiene:

$$\frac{\mathcal{D}_{AB} P}{(\mathcal{D}_{AB} P)^*} = 0.8$$

Donde  $(\mathcal{D}_{AB} P)^*$  es a baja presión y  $\mathcal{D}_{AB} P$  es a alta presión. Despejando  $\mathcal{D}_{AB}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{AB} &= 0.8 \frac{(\mathcal{D}_{AB} P)^*}{P} \\ \mathcal{D}_{AB} &= 0.8 \frac{(0.0603 \text{ cm}^2/\text{s})(1 \text{ bar})}{100 \text{ bar}} \\ \mathcal{D}_{AB} &= 4.8 \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s} \end{aligned}$$

### 5.1.4.5 Modelo de Stokes-Einstein (difusividad en líquidos a dilución infinita)

Los modelos para estimar coeficientes de difusión en líquidos no son tan exactos como para gases. En un líquido, la difusividad aumenta cuando aumenta la temperatura, disminuye cuando aumenta el peso molecular, y casi no es afectada por la presión.

Además, la difusividad depende fuertemente de la concentración, por lo que en muchos casos sólo puede estimarse para concentraciones muy bajas, es decir a dilución infinita (que se indica con un superíndice cero). Así,  $\mathcal{D}_{AB}^0$  representa la difusividad de A a dilución infinita en B; es decir, que cada molécula de A está rodeada prácticamente de B puro. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, muchas veces se asume que la difusividad a dilución infinita aplica para mayores concentraciones, a veces tan altas como 5 ó 10% mol de A.

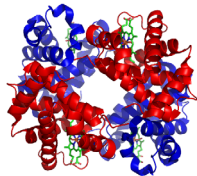
El modelo de Stokes-Einstein asume que A es un soluto esférico moviéndose en un solvente B viscoso:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = \frac{\kappa T}{6\pi\mu_B r_A} \quad (5.45)$$

donde  $\mathcal{D}_{AB}^0$  es la difusividad de A infinitamente diluido en B, en  $\text{m}^2/\text{s}$ ,  $\kappa = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura en K,  $\mu_B$  es la viscosidad del solvente B en  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ , y  $r_A$  es el radio del soluto en m.

Este modelo es de escasa aplicación práctica, ya que llega a tener errores muy altos. Sin embargo, sí es adecuado para solutos de alto peso molecular y estructura aproximadamente esférica (como es el caso de algunos polímeros y biomoléculas). A pesar de sus limitaciones, el modelo de Stokes-Einstein ha servido de base para desarrollar otras correlaciones, que presentan la misma dependencia  $T/\mu_B$  respecto a la temperatura y la viscosidad del solvente.

#### EJEMPLO 5.5



La hemoglobina es una molécula compleja encargada de transportar oxígeno y dióxido de carbono en la sangre. Tiene un peso molecular cercano a los 64,500 g/mol (Van Beekvelt, 2001). La difusividad de la hemoglobina, a dilución infinita en agua a 25 °C, es  $6.9 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$  (Cussler, 1997). Estimar su difusividad a dilución infinita en agua a 37 °C.

Cussler E.L. (1997). "Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems". 2nd Edition, Cambridge University Press.  
Van Beekvelt M.C., Colier W.N., Wevers R.A., Van Engelen B.G. (2001). "Performance of near-infrared spectroscopy in measuring local O<sub>2</sub> consumption and blood flow in skeletal muscle". *J Appl Physiol* 90 (2): 511-519.

#### SOLUCIÓN

Ya que la molécula es relativamente grande y de forma aproximadamente esférica, se puede emplear el modelo de Stokes-Einstein para estimar su difusividad. La viscosidad del agua a 25 °C es  $8.90 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , y a 37 °C es  $6.93 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Primero, se emplea el dato conocido de difusividad para estimar el radio molecular. Nótese que la difusividad debe convertirse a  $\text{m}^2/\text{s}$ . Despejando  $r_A$ :

$$r_A = \frac{\kappa T}{6\pi\mu_B \mathcal{D}_{AB}^0}$$

$$r_A = \frac{(1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K})(298.15 \text{ K})}{6\pi(8.90 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s})(6.9 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s})}$$

$$r_A = 3.556 \times 10^{-9} \text{ m}$$

Conociendo este dato, se obtiene ahora la difusividad, empleando la temperatura de 37 °C (310.15 K) y la correspondiente viscosidad del agua:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = \frac{\kappa T}{6\pi\mu_B r_A}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = \frac{(1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/K})(310.15 \text{ K})}{6\pi(6.93 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s})(3.556 \times 10^{-9} \text{ m})}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 9.22 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$$

Convirtiendo el resultado a las mismas unidades que el enunciado del ejercicio:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 9.22 \times 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{s}$$

### 5.1.4.6 Método de Wilke-Chang (difusividad en líquidos a dilución infinita)

El método de Wilke-Chang es bastante usado para difusividades en fase líquida a dilución infinita, pero en algunos casos puede llegar a tener errores elevados. Este método no debe emplearse cuando el soluto es agua.

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 7.4 \times 10^{-11} \frac{(\phi M_B)^{0.5} T}{\mu_B \tilde{V}_{b,A}^{0.6}} \quad (5.46)$$

donde  $\mathcal{D}_{AB}^0$  es la difusividad de A a dilución infinita en B, en  $\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $\phi$  es un factor adimensional de asociación del solvente (2.6 para agua, 1.9 para metanol, 1.5 para etanol, y 1.0 si no es un solvente asociado),  $M_B$  es el peso molecular del solvente en  $\text{g/mol}$ ,  $T$  es la temperatura en K,  $\mu_B$  es la viscosidad del solvente en  $\text{Pa}\cdot\text{s}$  y  $\tilde{V}_{b,A}$  es el volumen molar de líquido saturado del soluto.

#### EJEMPLO 5.6

Estimar la difusividad del ciclopentanol ( $\text{C}_5\text{H}_9\text{OH}$ ) en agua a  $20^\circ\text{C}$ , aplicando el modelo de Wilke-Chang.

#### SOLUCIÓN

La ecuación del modelo es:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 7.4 \times 10^{-11} \frac{(\phi M_B)^{0.5} T}{\mu_B \tilde{V}_{b,A}^{0.6}}$$

donde A es el soluto (ciclopentanol) y B es el solvente (agua). El volumen molar de líquido saturado del soluto  $\tilde{V}_{b,A}$  se puede estimar con el método aditivo de Le Bas:

Grupo	$\Delta\tilde{V}_b$	$n$	$n\Delta\tilde{V}_b$
carbono	14.8	5	74.0
hidrógeno	3.7	10	37.0
oxígeno (otros casos)	7.4	1	7.4
cierre de anillo de 5 miembros	-11.5	1	-11.5

Grupo	$\Delta\tilde{V}_b$	$n$	$n\Delta\tilde{V}_b$
SUMA $\tilde{V}_{b,A}$ ( $\text{cm}^3/\text{mol}$ )			<b>106.9</b>

Para el agua como solvente, el factor de asociación es  $\phi = 2.6$ , su peso molecular es  $M_B = 18.015 \text{ g/mol}$ , y su viscosidad a  $20^\circ\text{C}$  es  $1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Sustituyendo en la ecuación de Wilke-Chang:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 7.4 \times 10^{-11} \frac{(2.6 \times 18.015)^{0.5} (293.15)}{(0.001)(106.9)^{0.6}}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.98 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$$

### 5.1.4.7 Método de Tyn y Calus (difusividad en líquidos a dilución infinita)

Al emplear este método, los errores suelen estar por debajo del 10%.

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{\tilde{V}_{b,A}}{\tilde{V}_{b,B}^2} \right)^{1/6} \left( \frac{\mathbb{P}_B}{\mathbb{P}_A} \right)^{0.6} \frac{T}{\mu_B} \quad (5.47)$$

donde  $\mathcal{D}_{AB}^0$  es la difusividad de A a dilución infinita en B, en  $\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $\tilde{V}_{b,A}$  y  $\tilde{V}_{b,B}$  son los volúmenes molares de líquido saturado, en  $\text{cm}^3/\text{mol}$ , y  $\mathbb{P}_A$  y  $\mathbb{P}_B$  son los paracoros\*, en  $\text{g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$ , del soluto y el solvente, respectivamente;  $T$  es la temperatura en K y  $\mu_B$  es la viscosidad del solvente en  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ .

El método tiene las siguientes restricciones:

- ★ No se debe emplear para difusión en solventes viscosos (alrededor de 20 cP o más).
- ★ Si el solvente es agua, usar los siguientes valores para el volumen molar y el paracoro:
 
$$\tilde{V}_{b,B} = \tilde{V}_{b,H_2O} = 18.7 \text{ cm}^3/\text{mol} \quad \mathbb{P}_B = \mathbb{P}_{H_2O} = 52.6 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}.$$
- ★ Si el soluto es agua, se debe considerar como un dímero y duplicar el volumen molar y el paracoro, por lo que se usa:
 
$$\tilde{V}_{b,A} = 2\tilde{V}_{b,H_2O} = 37.4 \text{ cm}^3/\text{mol} \quad \mathbb{P}_A = 2\mathbb{P}_{H_2O} = 105.2 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}.$$
- ★ Si el soluto es un ácido orgánico y el solvente no es metanol ni butanol, el ácido se debe tratar como un dímero, por lo que  $\tilde{V}_{b,A}$  y  $\mathbb{P}_A$  se deben multiplicar por dos.
- ★ Para el caso de solutos no polares difundiendo en mono-alcoholes, los valores de  $\tilde{V}_{b,B}$  y  $\mathbb{P}_B$  se deben multiplicar por un factor numéricamente igual a  $8\mu_B$  donde  $\mu_B$  es la viscosidad del solvente en cP.

#### EJEMPLO 5.7

El acetato de etilo es el éster del ácido acético y el etanol. Es un líquido incoloro con olor dulce característico. Se produce a gran escala (más de un millón de toneladas anuales) para utilizarse como solvente, debido a su bajo costo, baja toxicidad y olor aceptable. Sus principales aplicaciones son en pegamentos, removedores de barniz de uñas, y en algunos procesos de producción de café descafeinado. También es el éster más común en el vino, especialmente los vinos jóvenes, y contribuye a la percepción “frutal” del vino.

<b>ACETATO DE ETILO</b>	
Fórmula	$\text{CH}_3\text{-COO-CH}_2\text{-CH}_3$
Número CAS	141-78-6
Punto de fusión	-83.55 °C
Punto de ebullición	77.15 °C
Temperatura crítica	250 °C
Presión crítica	38.3 bar
Volumen molar crítico	280 $\text{cm}^3/\text{mol}$
Densidad a 20 °C	0.900 $\text{g}/\text{cm}^3$
Densidad en el punto de ebullición	0.882 $\text{g}/\text{cm}^3$
Índice de refracción	1.372
Viscosidad	0.529 cP @ 0 °C 0.455 cP @ 20 °C 0.367 cP @ 40 °C

Empleando el método de Tyn y Calus, estimar la difusividad a dilución infinita a 25 °C de (A) acetato de etilo en agua, y (B) agua en acetato de etilo.

\* El paracoro (en inglés: *parachor*) es una cantidad definida como  $\mathbb{P} = \tilde{V}\sigma^{1/4}$  donde  $\tilde{V}$  es el volumen molar y  $\sigma$  es la tensión superficial, ambos medidos a la misma temperatura. Se puede considerar una propiedad física de un líquido ya que es una combinación de propiedades. En rangos moderados de temperatura, el paracoro es esencialmente constante. El paracoro del agua es  $\mathbb{P}_{H_2O} = 52.6 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$ . Para otros compuestos, el paracoro se puede estimar por el método de contribución de grupos de Quayle, que se incluye en el anexo.

**SOLUCIÓN**

Es importante recordar que en los métodos para difusividad en líquidos, A es el soluto y B es el solvente, por lo que esta asignación será diferente para cada inciso.

Para el método de Tyn y Calus se requiere el volumen molar de líquido saturado y el paracoro. Para el agua, estos datos son:

$$\tilde{V}_{b,H_2O} = 18.7 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$\mathbb{P}_{H_2O} = 52.6 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$$

El volumen molar del acetato de etilo se puede obtener directamente con la densidad en el punto de ebullición que se proporciona en la tabla, y el peso molecular:

$$\tilde{V}_{b,EtOAc} = \frac{88.106 \text{ g/mol}}{0.882 \text{ g/cm}^3} = 99.89 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

El paracoro del acetato de etilo se obtiene por contribución de grupos:

Grupo	$\Delta\mathbb{P}$	$n$	$n\Delta\mathbb{P}$
CH <sub>3</sub> -	55.0	2	110.0
-CH <sub>2</sub> - ( $n \leq 12$ )	40.0	1	40.0
-COO-	63.8	1	63.8
SUMA $\mathbb{P}_{EtOAc} =$			<b>213.8</b>

**(A) Acetato de etilo en agua:**

Para el soluto:

$$\tilde{V}_{b,A} = \tilde{V}_{b,EtOAc} = 99.89 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$\mathbb{P}_A = \mathbb{P}_{EtOAc} = 213.8 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$$

Para el solvente:

$$\tilde{V}_{b,B} = \tilde{V}_{b,H_2O} = 18.7 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$\mathbb{P}_B = \mathbb{P}_{H_2O} = 52.6 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$$

$$\mu_B = 8.90 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Sustituyendo en la ecuación de Tyn y Calus:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{\tilde{V}_{b,A}}{\tilde{V}_{b,B}^2} \right)^{1/6} \left( \frac{\mathbb{P}_B}{\mathbb{P}_A} \right)^{0.6} \frac{T}{\mu_B}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{99.89}{18.7^2} \right)^{1/6} \left( \frac{52.6}{213.8} \right)^{0.6} \frac{298.15}{8.9 \times 10^{-4}}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 1.047 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

**(B) Agua en acetato de etilo:**

Para el soluto, al ser agua, se debe multiplicar por dos el volumen molar y el paracoro:

$$\tilde{V}_{b,A} = 2\tilde{V}_{b,H_2O} = 37.4 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$\mathbb{P}_A = 2\mathbb{P}_{H_2O} = 105.2 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$$

Para el solvente:

$$\tilde{V}_{b,B} = \tilde{V}_{b,EtOAc} = 99.89 \text{ cm}^3/\text{mol}$$

$$\mathbb{P}_B = \mathbb{P}_{EtOAc} = 213.8 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$$

$$\mu_B = 0.433 \text{ cP} = 4.33 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Sustituyendo en la ecuación de Tyn y Calus:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{\tilde{V}_{b,A}}{\tilde{V}_{b,B}^2} \right)^{1/6} \left( \frac{\mathbb{P}_B}{\mathbb{P}_A} \right)^{0.6} \frac{T}{\mu_B}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{37.4}{99.89^2} \right)^{1/6} \left( \frac{213.8}{105.2} \right)^{0.6} \frac{298.15}{4.33 \times 10^{-4}}$$

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 3.71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

**5.1.4.8 Ecuación de Nernst-Haskell**

(difusividad de electrolitos en soluciones acuosas)

Cuando una sal se disocia en solución, no es la molécula completa la que se difunde sino los iones individuales. Sin embargo, la fuerte atracción electrostática hace que los iones se difundan con la misma rapidez en proporciones estequiométricas, para mantener la solución eléctricamente neutra.

Para soluciones diluidas de una única sal, en ausencia de un potencial eléctrico, la difusividad está dada por la ecuación de Nernst-Haskell:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = \frac{RT \left[ \frac{1}{|z_{(+)}|} + \frac{1}{|z_{(-)}|} \right]}{F^2 \left[ \frac{1}{\lambda_{(+)}^0} + \frac{1}{\lambda_{(-)}^0} \right]} \quad (5.48)$$

$\mathcal{D}_{AB}^0$  es la difusividad de la sal A infinitamente diluida en B, en  $\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $F$  es la constante de Faraday (96500 C/eq),  $z_{(+)}$  y  $z_{(-)}$  son las cargas del catión y del anión (usar valor absoluto), y  $\lambda_{(+)}^0$  y  $\lambda_{(-)}^0$  son las conductancias iónicas límite (a concentración cero) del catión y del anión, en  $(\text{A}/\text{cm}^2)/(\text{V}/\text{cm})(\text{eq}/\text{cm}^3) = \text{cm}^2/\Omega \cdot \text{eq}$ .

La Tabla 5.6 lista la conductancia iónica límite a 25 °C para varios iones. Para otras temperaturas, la conductancia iónica límite debe multiplicarse por un factor de  $[1 + a(T - 25)]$  donde la temperatura está en °C y  $a = 0.0139$  para  $\text{H}^+$ ,  $a = 0.018$  para  $\text{OH}^-$  y  $a = 0.02$  para todos los demás iones.

**Tabla 5.6** Conductancias iónicas límite ( $\text{cm}^2/\Omega \cdot \text{eq}$ ) para iones en agua a 25 °C.

CATIONES						ANIONES					
ión	$\lambda_{(+)}^0$	ión	$\lambda_{(+)}^0$	ión	$\lambda_{(+)}^0$	ión	$\lambda_{(-)}^0$	ión	$\lambda_{(-)}^0$	ión	$\lambda_{(-)}^0$
$\text{H}^+$	349.8	$\text{Mg}^{2+}$	53.1	$\text{Ti}^{2+}$	74.7	$\text{OH}^-$	198.6	$\text{NO}_2^-$	71.8	$\text{CrO}_4^{2-}$	85.0
$\text{D}^+$	243.6	$\text{Ca}^{2+}$	59.5	$\text{Hg}^{2+}$	53.0	$\text{F}^-$	54.4	$\text{NO}_3^-$	71.4	$\text{HCO}_3^-$	44.5
$\text{Li}^+$	38.7	$\text{Ba}^{2+}$	63.9	$\text{Ni}^{2+}$	50.0	$\text{Cl}^-$	76.4	$\text{HSO}_3^-$	50.0	$\text{CO}_3^{2-}$	72.0
$\text{Na}^+$	50.1	$\text{Cu}^{2+}$	55.0	$\text{Fe}^{2+}$	54.0	$\text{Br}^-$	78.1	$\text{HSO}_4^-$	50.0	$\text{CN}^-$	78.0
$\text{K}^+$	73.5	$\text{Co}^{2+}$	53.0	$\text{Fe}^{3+}$	68.0	$\text{I}^-$	76.8	$\text{PO}_4^{3-}$	69.0	$\text{HCOO}^-$	54.6
$\text{Ag}^+$	61.9	$\text{Zn}^{2+}$	52.8	$\text{Al}^{3+}$	61.0	$\text{ClO}_3^-$	64.6	$\text{HPO}_4^{2-}$	57.0	$\text{CH}_3\text{COO}^-$	40.9
$\text{NH}_4^+$	73.5	$\text{Pb}^{2+}$	71.0	$\text{Cr}^{3+}$	67.0	$\text{ClO}_4^-$	67.9	$\text{H}_2\text{PO}_4^-$	33.0	$\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-$	32.4

Adaptado de Dean (1989).

### EJEMPLO 5.8

Estimar la difusividad del cloruro férrico en solución acuosa diluida a 39 °C.

#### SOLUCIÓN

Se empleará la ecuación de Nernst-Haskell. Para el cloruro férrico ( $\text{FeCl}_3$ ), el catión es el ion férrico  $\text{Fe}^{3+}$  y el anión es el ion cloruro  $\text{Cl}^-$ , por lo que las cargas de los iones son:

$$z_{(+)} = +3 \quad z_{(-)} = -1$$

Las conductividades iónicas a dilución infinita se obtienen de la tabla:

$$\lambda_{(+)}^0 = 68.0 \text{ cm}^2/\Omega \cdot \text{eq} \quad \lambda_{(-)}^0 = 76.4 \text{ cm}^2/\Omega \cdot \text{eq}$$

Éstos valores son a 25 °C, para corregirlos a 39 °C hay que multiplicarlos por el factor  $[1 + a(T - 25)]$ , donde  $a = 0.02$  para iones diferentes de  $\text{H}^+$  o de  $\text{OH}^-$ , y la temperatura es en °C. Así, el factor de corrección es:

$$[1 + 0.02(39 - 25)] = 1.28$$

por lo que las conductividades iónicas corregidas son:

$$\lambda_{(+)}^0 = 87.04 \text{ cm}^2/\Omega \cdot \text{eq} \quad \lambda_{(-)}^0 = 97.79 \text{ cm}^2/\Omega \cdot \text{eq}$$

Para la ecuación de Nernst-Haskell se requiere también la constante universal de los gases,  $R = 8.314 \text{ J}/\text{mol} \cdot \text{K}$ , y la constante de Faraday,  $F = 96500 \text{ C}/\text{eq}$ . Nótese que para las cargas se usa el valor absoluto.

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = \frac{RT \left[ \frac{1}{|z_{(+)}|} + \frac{1}{|z_{(-)}|} \right]}{F^2 \left[ \frac{1}{\lambda_{(+)}^0} + \frac{1}{\lambda_{(-)}^0} \right]}$$

$$D_{AB}^0 = \frac{(8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(312.15 \text{ K}) \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right]}{(96500 \text{ C/eq})^2 \left[ \frac{1}{87.04 \text{ cm}^2/\Omega \cdot \text{eq}} + \frac{1}{97.79 \text{ cm}^2/\Omega \cdot \text{eq}} \right]}$$

$$D_{AB}^0 = 1.71 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

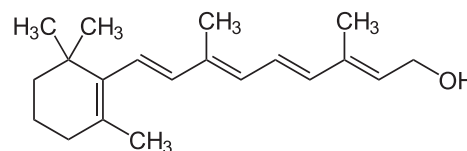
### 5.1.4.9 Método de Tang y Himmelblau (difusividad en mezclas de solventes líquidos)

Este método se recomienda para predecir la difusividad  $D_{1m}^0$  de un soluto (1) a dilución infinita en una mezcla de dos solventes líquidos (componentes 2 y 3). Además de las difusividades del soluto en cada solvente individual ( $D_{12}^0$  y  $D_{13}^0$ ), se requieren las viscosidades de los solventes puros y de la mezcla, así como la fracción mol  $x$  de cada solvente en la mezcla.

$$\ln(D_{1m}^0 \mu_m^{1/2}) = x_2 \ln(D_{12}^0 \mu_2^{1/2}) + x_3 \ln(D_{13}^0 \mu_3^{1/2}) \quad (5.49)$$

#### EJEMPLO 5.9

El retinol ( $C_{20}H_{30}O$ ) es una de las formas de la vitamina A. Se puede determinar su concentración en suero o plasma sanguíneo mediante cromatografía líquida (Pungor, 1995). Estimar la difusividad a 25 °C del retinol en un solvente mixto diclorometano/acetonitrilo (17% mol  $CH_2Cl_2$ ). La viscosidad del diclorometano y del acetonitrilo puros a 25 °C es 0.41 y 0.35 cP, respectivamente (Reid, 1987).



#### SOLUCIÓN

Los componentes se identifican por número: 1 – retinol, 2 – diclorometano, 3 – acetonitrilo. Primero, se debe estimar la difusividad del retinol en cada solvente con el método de Tyn y Calus, y luego combinarlas con el método de Tang y Himmelblau.

Volumen molar del retinol (método aditivo de Le Bas):

Grupo	$\Delta \tilde{V}_b$	$n$	$n\Delta \tilde{V}_b$
Carbono	14.8	20	296
Hidrógeno	3.7	30	111
Oxígeno (otros casos)	7.4	1	7.4
Cierre anillo 6 átomos	-15.0	1	-15.0
SUMA $\tilde{V}_{b,1} =$			<b>399.4</b>

Volumen molar de los solventes (método de Tyn y Calus):

$$\tilde{V}_b = 0.285 \tilde{V}_c^{1.048}$$

diclorometano	acetonitrilo
$\tilde{V}_{c,2} = 196 \text{ cm}^3/\text{mol}$	$\tilde{V}_{c,3} = 173 \text{ cm}^3/\text{mol}$
$\tilde{V}_{b,2} = 0.285(196)^{1.048}$	$\tilde{V}_{b,3} = 0.285(173)^{1.048}$
$\tilde{V}_{b,2} = 70.8 \text{ cm}^3/\text{mol}$	$\tilde{V}_{b,3} = 63.1 \text{ cm}^3/\text{mol}$

Paracoro del retinol:

Grupo	$\Delta P$	$n$	$n\Delta P$
$CH_3-$	55.0	5	275.0
$-CH_2-$ ( $n \leq 12$ )	40.0	3	120.0
$-CH_2-$ ( $n \leq 12$ )	40.0	1	40.0
$-OH$	29.8	1	29.8
C (aún no contados)	9.0	11	99.0
H (aún no contados)	15.5	6	72.0
Doble enlace (2,3)	17.7	1	17.7
Doble enlace (3,4 y siguientes)	16.3	3	48.9
Doble enlace (anillo)	19.1	1	19.1
Cierre de anillo 6 miembros	0.8	1	0.8
SUMA $P_1 =$			<b>722.3</b>

Paracoro del diclorometano:

Grupo	$\Delta P$	$n$	$n\Delta P$
C	9.0	1	9.0
H	15.5	2	31.0
Cl	55.2	2	110.4
SUMA $P_2 =$			<b>150.4</b>

Paracoro del acetonitrilo:

Grupo	$\Delta P$	$n$	$n\Delta P$
CH <sub>3</sub> -	55.0	1	55.0
C	9.0	1	9.0
N (otros casos)	17.5	1	17.5
SUMA $P_3 =$			<b>81.5</b>

Con esta información se puede calcular la difusividad del retinol en cada solvente. Primero para el retinol en diclorometano:

$$\mathcal{D}_{12}^0 = 8.93 \times 10^{-8} \left( \frac{\tilde{V}_{b,1}}{\tilde{V}_{b,2}^2} \right)^{1/6} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{0.6} \frac{T}{\mu_2}$$

$$\mathcal{D}_{12}^0 = 8.93 \times 10^{-8} \left( \frac{399.4}{70.8^2} \right)^{1/6} \left( \frac{150.4}{722.3} \right)^{0.6} \frac{298.15}{0.41}$$

$$\mathcal{D}_{12}^0 = 1.662 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

Y para el retinol en acetonitrilo:

$$\mathcal{D}_{13}^0 = 8.93 \times 10^{-8} \left( \frac{\tilde{V}_{b,1}}{\tilde{V}_{b,3}^2} \right)^{1/6} \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^{0.6} \frac{T}{\mu_3}$$

$$\mathcal{D}_{13}^0 = 8.93 \times 10^{-8} \left( \frac{399.4}{63.1^2} \right)^{1/6} \left( \frac{81.5}{722.3} \right)^{0.6} \frac{298.15}{0.35}$$

$$\mathcal{D}_{13}^0 = 1.400 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

Se requiere además la viscosidad de la mezcla de solventes. Empleando la regla de mezclado para no hidrocarburos (el retinol se ignora por estar a dilución infinita):

$$\ln \mu_m = \sum_{i=1}^n x_i \ln \mu_i$$

$$\ln \mu_m = x_2 \ln \mu_2 + x_3 \ln \mu_3$$

$$\ln \mu_m = 0.17 \ln(0.41) + 0.83 \ln(0.35)$$

$$\ln \mu_m = -1.022924$$

$$\mu_m = 0.36 \text{ cP}$$

Finalmente se usa el método de Tang y Himmelblau:

$$\ln(\mathcal{D}_{im}^0 \mu_m^{1/2}) = x_2 \ln(\mathcal{D}_{12}^0 \mu_2^{1/2}) + x_3 \ln(\mathcal{D}_{13}^0 \mu_3^{1/2})$$

$$\ln(\mathcal{D}_{im}^0 \mu_m^{1/2}) = 0.17 \ln[(1.662 \times 10^{-5})(0.41)^{1/2}]$$

$$+ 0.83 \ln[(1.400 \times 10^{-5})(0.35)^{1/2}]$$

$$\ln(\mathcal{D}_{im}^0 \mu_m^{1/2}) = -11.65875$$

$$\mathcal{D}_{im}^0 \mu_m^{1/2} = 8.6431 \times 10^{-6}$$

$$\mathcal{D}_{im}^0 = \frac{8.6431 \times 10^{-6}}{(0.36)^{1/2}}$$

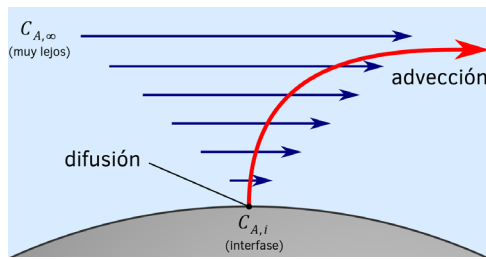
$$\mathcal{D}_{im}^0 = 1.44 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

## 5.2 Convección de masa

La transferencia de masa por convección tiene muchas similitudes con la transferencia de calor por convección, de hecho es la razón por la cual estos dos mecanismos de transferencia tienen el mismo nombre. La convección de masa es en realidad un mecanismo combinado que involucra la difusión molecular cerca de la superficie de un objeto, y la advección mediante el fluido que está más lejos del objeto. Para aclarar este concepto, considérese un objeto sólido estacionario, hecho de una sustancia A soluble, rodeado de un solvente en movimiento. Justo en la superficie del objeto (en la interfase) el sólido se va disolviendo y se tiene una concentración  $C_{A,i}$  de la sustancia A en el fluido. Esta concentración de hecho corresponde al equilibrio de fase, y es igual a la solubilidad del sólido en el líquido. Suficientemente lejos del objeto, el solvente tiene una concentración  $C_{A,\infty}$  (Figura 5.4).

Debido a la condición de no deslizamiento, la velocidad del fluido en contacto con la superficie del objeto debe ser cero. Las moléculas del componente A se van transfiriendo por difusión hacia capas del fluido más alejadas, donde la concentración es menor, de acuerdo a la ley de Fick de la difusión,  $\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A$ .

Conforme estas moléculas siguen pasando por difusión de capa en capa en el fluido, eventualmente va alcanzando capas que sí están en movimiento. Entonces, el fluido "acarrea" consigo las moléculas transferidas, mediante advección.



**Figura 5.4** La convección de masa como combinación de difusión y advección.

Macroscópicamente, se observa que el componente A pasó de la superficie del objeto al fluido y se analiza la convección de masa como un solo fenómeno, aunque en realidad sea un mecanismo combinado, resultado de la difusión y la advección actuando en conjunto.

Un análisis equivalente se puede realizar en el caso en el que el gradiente de concentración va en la dirección opuesta: cuando la concentración del componente A es mayor en el fluido lejos del objeto, comparada con la concentración en la interfase, la advección acarrea al componente hasta capas del fluido de menor velocidad, donde la difusión ocurre desde el fluido hacia la superficie.

Como en el caso de la transferencia de calor, en la transferencia de masa también se hace la distinción entre convección libre y convección forzada. En la *convección libre*, el fluido cerca del objeto y lejos de él tienen diferente concentración y, por lo tanto, diferente *densidad*. Entonces, la fuerza de flotación creada por la gravedad origina un movimiento local del fluido, aunque lejos del objeto la velocidad del fluido sea cero. En cambio, en la *convección forzada* existe algún *agente externo* (diferente a la transferencia de masa) que origina el movimiento del fluido.

### 5.2.1 Coeficiente(s) de transferencia de masa

La rapidez con la que se transfiere un componente por convección depende en primera instancia de la diferencia de concentración. Si la concentración es la misma en la superficie del objeto y lejos de él, no habrá transferencia de masa. Entonces, la densidad de flujo molar por convección es proporcional a la diferencia de concentración:

$$n_A \propto \Delta C_A$$

Para cambiar el símbolo de proporcionalidad a una igualdad, se introduce una constante de proporcionalidad:

$$n_A = k \Delta C_A \quad (5.50)$$

donde  $k$  se denomina coeficiente de transferencia de masa\*. Si la diferencia de concentración se expresa<sup>†</sup> en kmol/m<sup>3</sup> y la densidad de flujo molar por convección está dada en kmol/m<sup>2</sup>·s, entonces el coeficiente de transferencia de masa está dado en m/s.

Al igual que el coeficiente de transferencia de calor, el coeficiente de transferencia de masa depende primordialmente de tres factores:

- ★ **Condiciones de flujo:** En primera instancia, si la convección es libre o forzada; si el flujo es laminar o turbulento, y cuál es la velocidad del fluido.

\* no confundir con la conductividad térmica  $k$ , dada en W/m·K, que aparece en la ley de Fourier de la conducción.

† Aunque la unidad del SI para cantidad de materia es el mol, es conveniente utilizar kmol para facilitar la conversión entre unidades másicas y molares, al expresar el peso molecular en kg/kmol.

- ★ **Propiedades del sistema:** La densidad, viscosidad y difusividad. Es importante recalcar que la difusividad no es una propiedad de una sustancia individual (pues no existe transferencia de masa en una sustancia pura) sino que depende de cuáles sustancias se tengan en el sistema. Además, la densidad y viscosidad del fluido pueden depender de la concentración, en el caso de sistemas que no son diluidos.
- ★ **Geometría del sistema:** Generalmente se habla de flujo interno cuando el fluido está confinado por superficies sólidas, y de flujo externo cuando el fluido se extiende de forma ilimitada alrededor del objeto. La forma del objeto y la rugosidad de su superficie influyen también en el movimiento del fluido, y por lo tanto en la transferencia de masa por convección.

Una de las complicaciones con la transferencia de masa por convección, es que se puede expresar la composición empleando diversos sistemas, por ejemplo, concentración molar, fracción mol o presión parcial (esta última sólo para gases). Entonces, se pueden plantear diferentes “versiones” de la ecuación 5.50, dependiendo de la medida empleada para la composición, como se muestra en la Tabla 5.7.

**Tabla 5.7** Diversas formas de la ecuación de transferencia de masa, según el sistema usado para la composición.

FASE	FUERZA IMPULSORA	ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA	UNIDADES DEL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE MASA
GASEOSA	diferencia de presión parcial	$n_A = k_G \Delta P_A$	$\frac{\text{moles transferidos de } A}{(\text{presión})(\text{área})(\text{tiempo})}$
	diferencia de concentración	$n_A = k_C \Delta C_A$	$\frac{\text{moles transferidos de } A}{(\text{moles de } A/\text{volumen})(\text{área})(\text{tiempo})}$
	diferencia de fracción mol	$n_A = k_y \Delta y_A$	$\frac{\text{moles transferidos de } A}{(\text{moles de } A/\text{moles totales})(\text{área})(\text{tiempo})}$
LÍQUIDA	diferencia de concentración	$n_A = k_L \Delta C_A$	$\frac{\text{moles transferidos de } A}{(\text{moles de } A/\text{volumen})(\text{área})(\text{tiempo})}$
	diferencia de fracción mol	$n_A = k_x \Delta x_A$	$\frac{\text{moles transferidos de } A}{(\text{moles de } A/\text{moles totales})(\text{área})(\text{tiempo})}$

Nótese que el coeficiente de transferencia de masa para la fase gaseosa, empleando diferencia de presión parcial, se designa con el subíndice  $G$ , debido a que la presión parcial es la medida más común para la composición en la fase gaseosa. Del mismo modo, se emplea el subíndice  $L$  para el coeficiente en fase líquida cuando se utiliza la concentración molar como medida de la composición\*.

También es importante señalar, que el valor del coeficiente de transferencia de masa será diferente si está ocurriendo un proceso de difusión unimolecular (DUM) o de contradifusión equimolar. Una manera de distinguirlos es utilizar un superíndice 0 para los coeficientes de contradifusión equimolar (significando “cero flujo molar neto”)†. Entonces, por ejemplo,  $k_G$  sería el coeficiente de transferencia de masa en fase gaseosa para un proceso de difusión unimolecular, y  $k_G^0$  sería el coeficiente de transferencia de masa en fase gaseosa para un proceso de contradifusión equimolar, ambos empleando la diferencia de presiones parciales como medida de la composición.

Es frecuente que se necesite convertir un coeficiente de transferencia de masa de un sistema a otro. Para la fase gaseosa se tiene la serie de equivalencias:

$$k_y^0 = k_G^0 P = k_C^0 \frac{P}{RT} = k_y \frac{P_{B,ml}}{P} = k_G P_{B,ml} = k_C \frac{P_{B,ml}}{RT} \quad (5.51)$$

\* Hay diferencias entre una fuente bibliográfica y otra, esta notación no es completamente estándar.

† También en este sentido hay diferencias entre las diversas fuentes bibliográficas.

donde  $P$  es la presión total,  $R$  es la constante universal de los gases,  $T$  es la temperatura absoluta y  $P_{B,ml}$  es la media logarítmica de la presión parcial del componente B (acarreador), definida como:

$$P_{B,ml} = \frac{P_{B,G} - P_{B,i}}{\ln(P_{B,G} / P_{B,i})} \quad (5.52)$$

donde  $P_{B,G}$  es la presión parcial de B en el gas lejos del objeto y  $P_{B,i}$  es la presión parcial de B en la interfase (recordando que para un sistema binario,  $P_A + P_B = P$ ).

Cuando se tiene un sistema diluido o muy diluido, la media logarítmica de la presión parcial de B se puede simplificar:

$$P_{B,ml} \approx \frac{P_{B,G} + P_{B,i}}{2} \quad (\text{sistema diluido}) \quad (5.53)$$

$$P_{B,ml} \approx P \quad (\text{sistema muy diluido}) \quad (5.54)$$

Como consecuencia de esta última simplificación, es fácil demostrar que *si el sistema es diluido, el coeficiente de transferencia de masa para difusión unimolecular y para contradifusión equimolar tienen el mismo valor.*

Para el caso de una fase líquida, las equivalencias entre coeficientes de transferencia de masa son:

$$k_x^0 = k_L^0 C = k_x x_{B,ml} = k_L x_{B,ml} C \quad (5.55)$$

donde  $C$  es la concentración molar total y  $x_{B,ml}$  es la media logarítmica de la fracción mol del componente B (solvente):

$$x_{B,ml} = \frac{x_{B,L} - x_{B,i}}{\ln(x_{B,L} / x_{B,i})} \quad (5.56)$$

que para sistemas diluidos o muy diluidos se puede simplificar a:

$$x_{B,ml} \approx \frac{x_{B,L} + x_{B,i}}{2} \quad (\text{sistema diluido}) \quad (5.57)$$

$$x_{B,ml} \approx 1 \quad (\text{sistema muy diluido}) \quad (5.58)$$

## 5.2.2 Correlaciones para la estimación del coeficiente de transferencia de calor por convección

Al igual que en el caso de transferencia de calor, son pocos los casos en los que el coeficiente de transferencia de masa se puede deducir con base en un análisis matemático riguroso. La mayoría de las veces, su estimación depende de *correlaciones empíricas* deducidas a partir de datos experimentales. El caso más frecuente de correlación es para estimar el número de Sherwood ( $Sh$ ), en función del número de Reynolds ( $Re$ ) y del número de Schmidt ( $Sc$ ):

$$Sh = f(Re, Sc) \quad (\text{convección forzada}) \quad (5.59)$$

$$Sh = \frac{k\ell}{\mathcal{D}_{AB}} \quad Sc = \frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}} \quad (5.60)$$

recordando que  $\ell$  es una longitud característica que depende de la geometría del sistema, y generalmente es la misma longitud usada en el número de Reynolds y en el número de Sherwood.

La Tabla 5.8 muestran algunas correlaciones para estimación de coeficientes de transferencia de masa. Los coeficientes de transferencia de masa obtenidos con estas correlaciones aplican para sistemas en **contradifusión equimolar** o para **sistemas diluidos**. Las propiedades del fluido se evalúan a las condiciones promedio (entre la interfase y el resto del fluido). Para sistemas diluidos, puede usarse las propiedades del solvente.

**Tabla 5.8** Algunas correlaciones para convección de masa. Adaptado de Cussler (1997).

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	NOTAS
membrana	$\frac{k\delta}{\mathcal{D}_{AB}} = 1$	Aplicada incluso si la membrana es hipotética. $\delta$ = espesor de la membrana.
flujo laminar paralelo a una superficie plana	$Sh_L = 0.646Re_L^{1/2}Sc^{1/3}$	Deducida teóricamente, coeficiente promedio para toda la superficie. $Re_L = \rho v_\infty L / \mu$ . $L$ = longitud de la superficie. $v_\infty$ = velocidad del fluido lejos de la superficie.
flujo laminar en una tubería circular	$Sh_D = 1.62 \left( \frac{D^2 v}{L \mathcal{D}_{AB}} \right)^{1/3}$	Con base teórica verificada experimentalmente. $D$ = diámetro interno de la tubería. $L$ = longitud de la tubería. $v$ = velocidad promedio del fluido. $Re < 2100$ .
flujo turbulento en una tubería circular	$Sh_D = 0.026Re_D^{0.8}Sc^{1/3}$	$Re_D = \rho v D / \mu$ . $D$ = diámetro interno de la tubería. $v$ = velocidad promedio del fluido. $Re > 4000$ .
flujo turbulento en ranura entre dos superficies planas paralelas	$Sh_{D_H} = 0.026Re_{D_H}^{0.8}Sc^{1/3}$	Igual que en tubería, usando diámetro hidráulico de la ranura, $D_H = 2W / \pi$ . $Re_{D_H} = \rho v D_H / \mu$ . $Re > 4000$ . $v$ = velocidad promedio del fluido. $W$ = ancho de ranura.
convección forzada alrededor de una esfera sólida	$Sh_D = 2 + 0.6Re_D^{1/2}Sc^{1/3}$	$Re_D > 0.01$ . No hay una transición brusca entre flujo laminar y flujo turbulento.
convección libre alrededor de una esfera sólida	$Sh_D = 2 + 0.6 \left( \frac{\rho g \Delta \rho D^3}{\mu^2} \right)^{1/4} Sc^{1/3}$	$\Delta \rho$ = diferencia de densidad en la capa límite en el fluido (entre la interfase y el fluido lejos de la esfera). Como referencia, para una esfera de $D = 1$ cm en agua, la convección libre es significativa si $\Delta \rho \geq 10^{-6}$ kg/m <sup>3</sup> .
disco en rotación	$Sh_D = 0.62Re_\omega^{1/2}Sc^{1/3}$	Para $100 < Re_\omega < 20000$ , donde $Re_\omega = \rho \omega D^2 / \mu$ es el número de Reynolds con base en la velocidad angular $\omega$ (en rad/s).
lecho empacado	$\frac{k}{v_0} = 1.17Re^{-0.42}Sc^{-2/3}$	$Re = \rho v_0 d_p / \mu$ es el número de Reynolds con base en la velocidad superficial y el diámetro de partícula. $v_0$ = velocidad superficial (la velocidad que tendría el fluido si no existiera el empaque).
flujo perpendicular externo a un lecho de tubos capilares	$Sh_D = 0.80Re_D^{0.47}Sc^{1/3}$	Confiable si los capilares están espaciados de manera uniforme. $D$ = diámetro del capilar. $Re_D = \rho v_\infty D / \mu$ . $v_\infty$ = velocidad del fluido al aproximarse al lecho.
película descendente	$Sh_z = 0.69 \left( \frac{z v}{\mathcal{D}_{AB}} \right)^{0.5}$	Para coeficiente local de transferencia de masa. $z$ = posición a lo largo de la película, medida desde la parte superior. $v$ = velocidad promedio del fluido.
burbujas de gas puro ascendiendo en un líquido no agitado	$Sh_d = 0.31 \left( \frac{\rho g \Delta \rho d^3}{\mu^2} \right)^{1/3} Sc^{1/3}$	Para burbujas individuales o grupos pequeños de burbujas. $d$ = diámetro de la burbuja. $\Delta \rho$ = diferencia de densidad entre el líquido y el gas.
burbujas de gas puro en un tanque agitado	$\frac{k}{\mathcal{D}_{AB}} = 0.13 \left( \frac{(\dot{W} / V) \rho^2}{\mu^3} \right)^{1/4} Sc^{1/3}$	$k$ no depende del diámetro de burbuja. $(\dot{W} / V)$ es la potencia de agitación por unidad de volumen (W/m <sup>3</sup> ). $\rho$ = densidad del líquido. $\mu$ = viscosidad del líquido.
gotas pequeñas de líquido en un líquido inmiscible no agitado	$Sh_d = 1.13 \left( \frac{d v_\infty}{\mathcal{D}_{AB}} \right)^{0.8}$	Las gotas pequeñas se comportan como esferas rígidas. $d$ = diámetro de la gota. $v_\infty$ = velocidad terminal de la gota.

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	NOTAS
gotas grandes de líquido en un líquido inmiscible no agitado	$Sh_d = 0.42 \left( \frac{\rho g  \Delta\rho  d^3}{\mu^2} \right)^{1/3} Sc^{1/2}$	Gotas de 3 mm de diámetro o mayores. $d$ = diámetro de la gota. $\Delta\rho$ = diferencia de densidad entre ambas fases. $\mu$ = viscosidad de la fase continua.
líquido en una columna empacada	$k \left( \frac{\rho}{\mu g} \right)^{1/3} = 0.0051 \left( \frac{\rho v_0}{a\mu} \right)^{0.67} (ad)^{0.4} Sc^{-0.5}$	Correlación muy confiable para líquidos, suele dar valores más bajos que otras. $d$ = tamaño nominal del empaque. $a$ = área de empaque por unidad de volumen de columna. $v_0$ = velocidad superficial del líquido.
	$Sh_d = 25 Re_d^{0.45} Sc^{0.5}$	Correlación clásica muy citada, tal vez menos confiable que la anterior. $Re = \rho v_0 d / \mu$ . $d$ = tamaño nominal del empaque. $v_0$ = velocidad superficial del líquido.
gas en una columna empacada	$\frac{k}{a \mathcal{D}_{AB}} = 3.6 \left( \frac{\rho v_0}{a\mu} \right)^{0.70} (ad)^{-2} Sc^{1/3}$	Correlación muy buena para gases. $d$ = tamaño nominal del empaque. $a$ = área de empaque por unidad de volumen de columna. $v_0$ = velocidad superficial del gas.
	$Sh_d = 1.2(1-\varepsilon)^{0.36} Re_d^{0.64} Sc^{1/3}$	Correlación clásica muy citada. $Re = \rho v_0 d / \mu$ . $\varepsilon$ = fracción hueca del empaque. $d$ = tamaño nominal del empaque. $v_0$ = velocidad superficial del líquido.

$D$  = diámetro.  $\mathcal{D}_{AB}$  = coeficiente de difusión.  $g$  = gravedad.  $k$  = coeficiente de transferencia de masa.  
 $v$  = velocidad del fluido.  $\mu$  = viscosidad del fluido.  $\rho$  = densidad del fluido.

### EJEMPLO 5.10

Un disco sólido de ácido benzoico de 40 mm de diámetro se encuentra girando a 45 rpm sumergido en un recipiente grande con agua a 25 °C, que tiene una concentración de ácido benzoico disuelto de 6.7 mol/m<sup>3</sup>. A 25 °C, la difusividad del ácido benzoico en agua es 9×10<sup>-6</sup> cm<sup>2</sup>/s y su solubilidad es 28.1 mol/m<sup>3</sup>. Calcular el coeficiente de transferencia de masa y la rapidez con la que se está disolviendo el ácido benzoico (en mol/m<sup>2</sup>·h).

NOTA: Como el ácido benzoico es sólo escasamente soluble en agua, el sistema es diluido.

### SOLUCIÓN

Primero es necesario identificar la correlación adecuada para estimar el coeficiente de transferencia de masa. Para discos en rotación:

$$Sh_D = 0.62 Re_\omega^{1/2} Sc^{1/3}$$

donde los grupos adimensionales son:

Sherwood  $Sh_D = \frac{kD}{\mathcal{D}_{AB}}$

Reynolds  $Re_\omega = \frac{\rho\omega D^2}{\mu}$

Schmidt  $Sc = \frac{\mu}{\rho\mathcal{D}_{AB}}$

La correlación es aplicable para  $Re_\omega$  entre 100 y 20000.

Como la solución es diluida, las propiedades del fluido son esencialmente las mismas que las del agua. De la tabla de propiedades del agua saturada, a 25 °C, se tiene  $\rho = 997 \text{ kg/m}^3$  y  $\mu = 0.89 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Para calcular el número de Reynolds, es necesario convertir la velocidad angular de rpm a rad/s:

$$\frac{45 \text{ rev}}{\text{min}} \left| \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right| \left| \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right| = 4.7124 \text{ rad/s}$$

Se sustituye entonces para el número de Reynolds:

$$Re_\omega = \frac{\rho\omega D^2}{\mu} = \frac{(997 \text{ kg/m}^3)(4.7124 \text{ rad/s})(0.04 \text{ m})^2}{0.89 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}}$$

$$Re_\omega = 8446.3$$

que sí está dentro del intervalo de aplicabilidad de la correlación.

Obsérvese que, en la cancelación de unidades se aprovechó la equivalencia 1 Pa·s = 1 kg/m·s, y que los radianes son unidades adimensionales (m/m) que simplemente desaparecen.

Para el número de Schmidt, es necesario convertir la difusividad a m<sup>2</sup>/s para poder cancelar las unidades:

$$\frac{9 \times 10^{-6} \text{ cm}^2}{\text{s}} \left| \frac{1^2 \text{ m}^2}{100^2 \text{ cm}^2} \right| = 9 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$$

Sustituyendo:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}_{AB}} = \frac{0.89 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}}{(997 \text{ kg/m}^3)(9 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s})}$$

$$Sc = 991.86$$

Ahora se sustituyen estos dos números adimensionales en la correlación para el número de Sherwood:

$$Sh_D = 0.62 Re_\omega^{1/2} Sc^{1/3} = 0.62 (8446.3)^{1/2} (991.86)^{1/3}$$

$$Sh_D = 568.25$$

Luego, de la definición del número de Sherwood, se despeja el coeficiente de transferencia de masa:

$$Sh_D = \frac{kD}{\mathcal{D}_{AB}} \longrightarrow k = \frac{\mathcal{D}_{AB}}{D} Sh_D$$

Sustituyendo:

$$k = \frac{9 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}}{0.04 \text{ m}} (568.25)$$

$$k = 1.2786 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

Por las unidades de  $k$ , se sabe que el coeficiente que se obtuvo es para usarse con una diferencia de concentración; además, las correlaciones dan coeficientes para **contradifusión equimolar**, por lo que este valor corresponde a  $k_L^0$ . Pero en el sistema, sólo el ácido benzoico se está transfiriendo, del disco a la solución, por lo que se tiene un caso de **difusión unimolecular**.

Se puede hacer la conversión aplicando la igualdad:

$$k_L x_{B,ml} C = k_L^0 C$$

La concentración molar total  $C$  es la misma a ambos lados de la ecuación, por lo que se cancela:

$$k_L x_{B,ml} = k_L^0$$

La media logarítmica de la fracción mol del solvente,  $x_{B,ml}$ , está definida como:

$$x_{B,ml} = \frac{x_{B,L} - x_{B,i}}{\ln(x_{B,L} / x_{B,i})}$$

donde el subíndice  $i$  se refiere a la interfase (sólido-líquido) y el subíndice  $L$  se refiere al líquido lejos del disco.

En este caso, sin embargo, como el sistema es diluido, se tiene que  $x_{B,ml} \approx 1$ , por lo que:

$$k_L = k_L^0$$

Es decir, el coeficiente de transferencia de masa para este caso tiene el mismo valor que el obtenido de la correlación.

Finalmente, para calcular la densidad de flujo molar:

$$n_A = k_L \Delta C_A$$

donde la diferencia de concentración es  $\Delta C_A = (C_{A,i} - C_{A,L})$ . La concentración en la interfase  $C_{A,i}$  corresponde a la solubilidad, pues es una interfase sólido-líquido donde el sólido es soluble, y la concentración en el líquido  $C_{A,L}$  es la concentración de ácido benzoico lejos del disco (dada en el enunciado). Sustituyendo:

$$n_A = (1.2786 \times 10^{-5} \text{ m/s})(28.1 \text{ mol/m}^3 - 6.7 \text{ mol/m}^3)$$

$$n_A = 2.7362 \times 10^{-4} \text{ mol/m}^2 \cdot \text{s}$$

que se convierte a las unidades indicadas:

$$n_A = 0.985 \text{ mol/m}^2 \cdot \text{h}$$

## REFERENCIAS

### *Referencias principales*

A continuación, se listan los principales libros frecuentemente consultados sobre Fenómenos de Transporte. La mayoría son libros bastante comunes y se espera que se encuentren disponibles en cualquier biblioteca suficientemente completa en el área de ingeniería química.

- ★ Bennett y Myers (1987). "Momentum, Heat and Mass Transfer". McGraw-Hill.
- ★ Bird, Stewart y Lightfoot (1960). "Fenómenos de Transporte". Reverté.
- ★ Bird, Stewart y Lightfoot (2002). "Transport Phenomena". 2ª edición, Wiley.
- ★ Brodkey (1988). "Transport Phenomena". McGraw-Hill.
- ★ Çengel y Ghajar (2011). "Transferencia de calor y masa", McGraw-Hill. 4ª edición, McGraw-Hill
- ★ Cussler (1997). "Diffusion: Mass Transfer in Engineering Systems". Cambridge University Press.
- ★ Dean (1989). "Lange: Manual de Química". 13ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Geankoplis (1998). "Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias". 3ª edición, CECSA.
- ★ Holman (1998). "Transferencia de calor", 8ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Incropera y DeWitt (2006). "Fundamentos de Transferencia de Calor", 6ª edición, Prentice Hall.
- ★ Kern (1999). "Procesos de Transferencia de Calor". CECSA.
- ★ Levenspiel (1993). "Engineering Flow and Heat Exchange". Springer.
- ★ McCabe, Smith y Harriott (1991). "Operaciones Unitarias en Ingeniería Química", 4ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Middleman (1998). "An Introduction to Fluid Dynamics". Wiley.
- ★ Özişik (1985) "Heat Transfer: A Basic Approach". McGraw-Hill.
- ★ Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Poling, Prausnitz y O'Connell (2000). "The Properties of Gases and Liquids". 5ª edición, McGraw-Hill
- ★ Reid, Prausnitz y Poling (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª edición, McGraw-Hill
- ★ Treybal (1980). "Operaciones de Transferencia de Masa". 2ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Welty, Rorrer y Foster (2013). "Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer", Wiley.
- ★ Welty, Wicks y Wilson (1997). "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa". Limusa.

### Referencias suplementarias

En esta lista se incluyen libros y artículos que se consultaron esporádicamente, frecuentemente como fuente de datos o información muy específica. Es posible que la disponibilidad para consulta de algunas de estas referencias sea limitada, ya que una biblioteca promedio no suele tener estos documentos.

- ★ Fox y McDonald (1995). "Introducción a la mecánica de fluidos". 4ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Kim (2002). "A Calculation for the Viscosity of Fluid at the Critical Point". Bull. Korean Chem. Soc. **23**(11).
- ★ Morrison (2013). "Data Correlation for Drag Coefficient for Sphere".  
<http://www.chem.mtu.edu/~fmorriso/DataCorrelationForSphereDrag2013.pdf>.
- ★ Oncone (2001). "Special Topics in Transport Phenomena".
- ★ Rice y Do (1995). "Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers". John Wiley & Sons, Inc.
- ★ Schlichting y Gersten (2003). "Boundary Layer Theory". 8ª edición, Springer.
- ★ Spencer (2004). "Continuum Mechanics". Dover Publications.
- ★ Tennekes y Lumley (1972). "A First Course in Turbulence". Massachusetts Institute of Technology Press.
- ★ Wark (1991). "Termodinámica". 5ª edición, McGraw-Hill.
- ★ Washburn [ed.] (2003). "International Critical Tables". 1ª edición electrónica, Knovel.
- ★ White (1986). "Fluid Mechanics". 2ª edición, McGraw-Hill.
- ★ White (1991). "Viscous Fluid Flow". 2ª edición, McGraw-Hill.

## MISCELÁNEA DE EJERCICIOS

Ésta no pretende ser una recopilación exhaustiva, sino una muestra de la variedad de planteamientos que se pueden desarrollar respecto a los temas cubiertos en el curso. Ejercicios adicionales pueden ser encontrados en las diversas fuentes citadas en la bibliografía.

### EJERCICIO 1

Demostrar que las unidades de la viscosidad cinemática  $\nu = \mu / \rho$  en el sistema internacional son  $\text{m}^2/\text{s}$ , partiendo de las unidades de viscosidad y densidad.

### EJERCICIO 2

Demostrar que las unidades de la difusividad térmica  $\alpha = k / \rho c_p$  en el sistema internacional son  $\text{m}^2/\text{s}$ , partiendo de las unidades de densidad, capacidad calorífica y conductividad térmica.

### EJERCICIO 3

Demostrar que la ecuación de gas ideal,  $PV = nRT$ , cumple con el principio de homogeneidad dimensional. Usar para la constante universal de los gases las unidades  $\text{J}/\text{mol}\cdot\text{K}$ .

### EJERCICIO 4

A partir de las unidades dadas, deducir las dimensiones de: (A) tensión superficial,  $\text{N}/\text{m}$ ; (B) viscosidad,  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ; (C) capacidad calorífica molar,  $\text{J}/\text{mol}\cdot\text{K}$ ; (D) conductividad térmica,  $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ; (E) conductividad eléctrica,  $\text{S}/\text{m}$ .

(NOTA:  $1 \text{ S} = 1 \text{ siemen} = 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ A}/\text{V}$ ).

RESPUESTA: (A)  $\text{MT}^{-2}$  (B)  $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$  (C)  $\text{ML}^2\text{T}^{-2}\Theta^{-1}\text{N}^{-1}$  (D)  $\text{MLT}^{-3}\Theta^{-1}$  (E)  $\text{M}^{-1}\text{L}^{-3}\text{T}^3\text{I}^2$

### EJERCICIO 5

En un laboratorio de mecánica de fluidos, se tiene un tanque de diámetro  $D$  con un nivel inicial de agua  $h_0$ , con un agujero de drenaje de diámetro  $d$  en el fondo. El experimentador supone que el tiempo de vaciado  $t$  depende de  $h_0$ ,  $D$  y  $d$ , así como de la gravedad  $g$ , y de la densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  del agua. Empleando el teorema pi de Buckingham, encontrar un conjunto de grupos adimensionales pertinentes a este experimento.

RESPUESTA:  $\pi_1 = \frac{t^2 g}{D}$ ,  $\pi_2 = \frac{d}{D}$ ,  $\pi_3 = \frac{h_0}{D}$ ,  $\pi_4 = \frac{\mu^2}{\rho^2 g D^3}$

### EJERCICIO 6

Un parámetro importante en el estudio del flujo turbulento es una medida de longitud llamada *microescala de Kolmogorov* ( $\eta$ , en m), que representa el tamaño de los remolinos más pequeños, donde los efectos viscosos dominan a los inerciales. Esta distancia depende de la viscosidad cinemática del fluido ( $\nu$ , en  $\text{m}^2/\text{s}$ ) y de la disipación de energía cinética turbulenta ( $\varepsilon$ , en  $\text{m}^2/\text{s}^3$ ). Aplicando el método de Rayleigh, demostrar que  $\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}$ .

**EJERCICIO 7**

El caudal  $Q$  de un líquido que derrama sobre un rebosadero es función de la densidad  $\rho$  y la viscosidad  $\mu$  del líquido, de la altura  $H$  del líquido sobre el rebosadero, y de la aceleración de la gravedad  $g$ . Aplicando el método de Rayleigh, expresar esta relación en forma adimensional.

$$\text{RESPUESTA: } \frac{\rho Q}{\mu H} = C \left( \frac{\rho^2 H^3 g}{\mu^2} \right)^d$$

**EJERCICIO 8**

La convección entre una esfera y un fluido en movimiento está caracterizada por un parámetro llamado coeficiente de transferencia de calor por convección ( $h$ , en  $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ ), que depende del diámetro de la esfera ( $D$ ), la velocidad del fluido ( $v$ ), y de las propiedades del fluido como su densidad ( $\rho$ ), su viscosidad ( $\mu$ ), su capacidad calorífica ( $c_p$ , en  $\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}$ ) y su conductividad térmica ( $k$ , en  $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ). Empleando el método de Rayleigh, expresar esta relación en forma adimensional.

$$\text{UNA RESPUESTA: } \frac{h}{\rho v c_p} = c \left( \frac{\mu}{\rho v D} \right)^d \left( \frac{k}{\rho v D c_p} \right)^f, \text{ donde } c, d \text{ y } f \text{ son constantes}$$

**EJERCICIO 9**

El flujo volumétrico  $F$  en ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) obtenido de una bomba depende de su potencia  $\dot{W}$  (en watts), del diámetro  $D$  de la tubería de descarga y de la densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  del fluido bombeado. Aplicando el método pi de Buckingham, tomando como parámetros base  $\dot{W}$ ,  $D$  y  $\mu$ , determinar los grupos adimensionales que relacionen estas variables.

$$\text{RESPUESTA: } \pi_1 = \frac{F^2 \mu}{D^3 \dot{W}}, \quad \pi_2 = \frac{\rho^2 D \dot{W}}{\mu^3}$$

**EJERCICIO 10**

Un fluido circula horizontalmente a través de un lecho empacado de granos de arena de tamaño uniforme. Se considera que la caída de presión  $\Delta P$  a lo largo del flujo cumple con la relación funcional  $\Delta P = f(v, d_p, L, \rho, \mu)$ , donde las variables independientes son la velocidad  $v$  del fluido, el diámetro de partícula  $d_p$  de la arena, la longitud  $L$  de la tubería, y la densidad  $\rho$  y viscosidad  $\mu$  del fluido. Expresar esta relación en forma adimensional.

$$\text{UNA RESPUESTA: } \frac{\Delta P}{\rho v^2} = f \left( \frac{L}{d_p}, \frac{\rho v d_p}{\mu} \right)$$

**EJERCICIO 11**

La convección entre una esfera y un fluido en movimiento está caracterizada por un parámetro llamado coeficiente de transferencia de calor por convección ( $h$ , en  $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ ), que depende del diámetro de la esfera ( $D$ ), la velocidad del fluido ( $v$ ), y de las propiedades del fluido como su densidad ( $\rho$ ), su viscosidad ( $\mu$ ), su capacidad calorífica ( $c_p$ , en  $\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}$ ) y su conductividad térmica ( $k$ , en  $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ). Determinar un conjunto de números adimensionales para este caso.

$$\text{UNA RESPUESTA: } \pi_1 = \frac{hD}{k}, \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v D}, \quad \pi_3 = \frac{\rho v D c_p}{k}$$

**EJERCICIO 12****81989.90**

La altura  $z$  de un objeto lanzado verticalmente está dada por la ecuación  $z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ , donde  $z_0$  es la altura inicial,  $v_0$  es la velocidad inicial (positiva si es hacia arriba),  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $t$  es el tiempo. Adimensionalizar esta ecuación, definiendo la altura adimensional como  $\xi = gz / v_0^2$ , y el tiempo adimensional como  $\zeta = gt / v_0$ .

RESPUESTA:  $\xi = \xi_0 + \zeta \left(1 - \frac{1}{2} \zeta\right)$

**EJERCICIO 13**

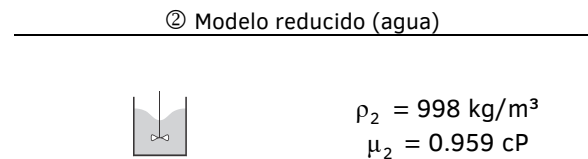
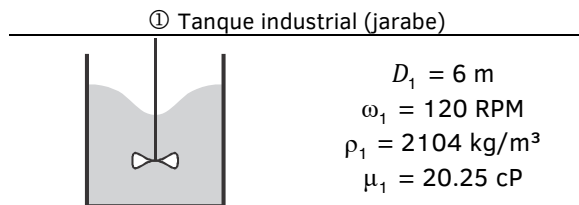
Se desea estudiar las características de sedimentación de las partículas de polvo en el aire, mediante un modelo a escala ampliada que usará gravilla triturada sedimentando en glicerina. Las partículas de polvo tienen un diámetro promedio de  $2.5 \mu\text{m}$  y una densidad de  $1850 \text{ kg/m}^3$ , y el aire en el que se encuentran tiene una densidad de  $1.2 \text{ kg/m}^3$  y una viscosidad de  $180 \mu\text{P}$ . Calcular qué diámetro promedio debe tener la gravilla a utilizar, para tener idéntico número de Arquímedes, si tiene una densidad de  $2730 \text{ kg/m}^3$ , y la glicerina que se utilizará en el modelo tiene una densidad de  $754 \text{ kg/m}^3$  y una viscosidad de  $1.85 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

RESPUESTA:  $4.71 \text{ mm}$ .

**EJERCICIO 14**

Adaptado de Bird (2002).

Se desea evaluar las características de agitación para un tanque industrial que va a contener un jarabe de azúcar, mediante el estudio de un modelo a escala reducida. Las variables que se cree influyen en este proceso son el diámetro del tanque  $D$ , el diámetro  $d$  del agitador, la velocidad angular  $\omega$  del agitador, la viscosidad cinemática  $\nu$  del fluido, y la gravedad  $g$ . Obtener un conjunto de grupos adimensionales relevantes para este caso, y emplearlos para determinar el diámetro  $D_2$  y la velocidad angular  $\omega_2$  del agitador en el modelo a escala reducida.



RESPUESTA:  $D_2 = 1.291 \text{ m}$ ;  $\omega_2 = 259 \text{ RPM}$ .

**EJERCICIO 15****82836.22**

La potencia ( $\dot{W}$ , medida en watts) requerida para accionar un ventilador se supone que depende de la densidad del fluido ( $\rho$ ,  $\text{kg/m}^3$ ), el flujo volumétrico ( $\dot{V}$ ,  $\text{m}^3/\text{s}$ ), el diámetro del impulsor ( $D$ ,  $\text{m}$ ), y la velocidad angular ( $\omega$ ,  $\text{s}^{-1}$ ).

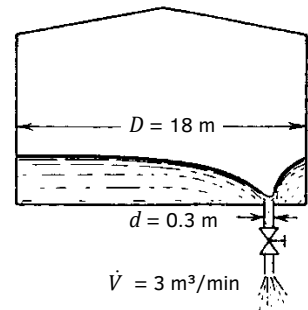
- (A) Aplicando el método pi de Buckingham, encontrar un conjunto de grupos adimensionales que involucren estos parámetros. Seleccionar como dimensiones base  $D$ ,  $\rho$  y  $\omega$ .
- (B) Si un ventilador con  $D_1 = 8 \text{ plg}$  operando a  $\omega_1 = 2400 \text{ rpm}$  proporciona un flujo de  $\dot{V}_1 = 800 \text{ pie}^3/\text{min}$  de aire con un consumo de potencia de  $\dot{W} = 1.5 \text{ kW}$ , ¿qué flujo volumétrico de aire y potencia requerida podría esperarse para un ventilador geoméricamente similar con  $D_2 = 16 \text{ plg}$  operando a  $\omega_2 = 1850 \text{ rpm}$ ? En ambos casos, la densidad del aire es la misma.

RESPUESTA:  $4933 \text{ pie}^3/\text{min}$ ,  $21.98 \text{ kW}$

**EJERCICIO 16**

Adaptado de Bird (1960)

Se planea construir un tanque de almacenamiento de melaza de 18 m de diámetro, con una tubería de salida de 0.3 m de diámetro colocada a 1.2 m de la pared lateral del tanque. El flujo volumétrico de salida debe ser 3 m<sup>3</sup>/min. Se sabe por experiencia que al extraer la melaza se forma un vórtice. Cuando disminuye el nivel del líquido, el vórtice alcanza finalmente la tubería de salida, succionándose aire junto con la melaza, lo que es una situación indeseable. El comportamiento de este sistema se va a estudiar usando agua (asumir 1 g/cm<sup>3</sup> y 1 cP) en un modelo a escala reducida, dinámicamente similar. Determinar las dimensiones y las condiciones de operación del modelo, sabiendo que la densidad de la melaza es 1.283 g/cm<sup>3</sup> y su viscosidad es 56.7 cP.



RESPUESTA: El tanque debe medir 1.44 m de diámetro, la tubería de salida debe medir 2.4 cm de diámetro y estar ubicada a 9.6 cm de la pared lateral, y el flujo de salida debe ser 5.43 L/min.

**EJERCICIO 17**

El ciclopentano hierve a 49 °C y tiene una densidad de líquido de 0.745 g/cm<sup>3</sup>. Estimar la viscosidad del vapor de ciclopentano a 150 °C y 1 atm.

RESPUESTA: 110 μP

**EJERCICIO 18**

Estimar la viscosidad del acetileno gaseoso a 45 °C y 1 atm, aplicando (A) la teoría cinética de Chapman-Enskog y (B) el método de Stiel y Thodos.

RESPUESTA: (A) 1.094 × 10<sup>-5</sup> Pa·s, (B) 1.057 × 10<sup>-5</sup> Pa·s

**EJERCICIO 19**

El vapor de fenol a 750 °C y 1 atm tiene una viscosidad de 247 μP. ¿Cuál será su viscosidad si la presión aumenta a 450 atm?

RESPUESTA: 796.8 μP

**EJERCICIO 20**

La viscosidad del dióxido de carbono a 300 K y 1 atm es 149 μP (Incropera, 2006, Tabla A.4). Estimar la viscosidad del CO<sub>2</sub> a 174 °C y 130 atm.

RESPUESTA: 281 μP

**EJERCICIO 21**

Estimar la viscosidad del ciclopropano gaseoso a 435 °C y 110 atm.

RESPUESTA: 254 μP

**EJERCICIO 22**

Estimar la viscosidad de una mezcla gaseosa de 20% mol benceno, 35% mol tolueno y 45% mol ciclohexano a 100 °C y 1 atm. Las viscosidades de los componentes puros a las mismas condiciones de temperatura y presión son 92.5 μP, 89.1 μP y 87.3 μP, respectivamente.

RESPUESTA: 89.9 μP

**EJERCICIO 23**

Construir una gráfica de la viscosidad de mezclas de amoniaco e hidrógeno a 33 °C en función de la fracción mol de  $\text{NH}_3$ . A dicha temperatura, las viscosidades de los componentes puros son 90.6  $\mu\text{P}$  para el hidrógeno y 105.9  $\mu\text{P}$  para el amoniaco. Desarrollar un cálculo a mano a una cierta composición como ejemplo, y los demás puntos de la gráfica obtenerlos empleando una hoja de cálculo.

**EJERCICIO 24**

Estimar la viscosidad a 25 °C de una mezcla líquida que contiene un 35% de acetona y un 65% de n-octanol (base molar). La viscosidad de los componentes puros a 25 °C es 0.32 y 7.21 cP, respectivamente (Reid, 1987).

RESPUESTA: 2.42 cP

**EJERCICIO 25**

Estimar la conductividad térmica del nitrógeno gaseoso a 135 °C y 1 atm. En esas condiciones, su capacidad calorífica a presión constante es 1047 J/kg·K y su viscosidad es 223  $\mu\text{P}$ .

RESPUESTA: 0.0335 W/m·K

**EJERCICIO 26**

Estimar la conductividad térmica del n-butano ( $\text{C}_4\text{H}_{10}$ ) a 273 K y 1 bar. En esas condiciones de temperatura y presión, su capacidad calorífica a presión constante es 92.9 J/mol·K y su viscosidad es  $6.88 \times 10^{-6}$  Pa·s.

RESPUESTA: 0.0138 W/m·K

**EJERCICIO 27**

Estimar la conductividad térmica del vapor de disulfuro de carbono a 174 °C y 2.1 atmósferas.

RESPUESTA: 0.0127 W/m·K

**EJERCICIO 28**

Estimar la conductividad térmica del argón a 110 °C y 147 atm.

RESPUESTA: 0.0268 W/m·K

**EJERCICIO 29**

Estimar la conductividad térmica del metano a 100 °C y 140 bar.

RESPUESTA: 0.054 W/m·K

**EJERCICIO 30**

Graficar la conductividad térmica de mezclas oxígeno-helio a 25 °C y 1 atm, en función de la fracción mol de oxígeno.

**EJERCICIO 31**

El estireno  $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH=CH}_2$  (también llamado vinilbenceno) es un líquido incoloro de olor dulce, precursor del polímero poliestireno (PS) que se usa para estuches plásticos, vasos térmicos desechables y materiales de empaque (nieve seca), entre otros usos. Estimar la conductividad térmica del estireno a 20 °C, aplicando el método de Sato y Riedel  
DATOS ADICIONALES DEL ESTIRENO: Punto de ebullición normal 418.3 K, temperatura crítica 647 K.

RESPUESTA: 0.137 W/m·K

**EJERCICIO 32**

Estimar la conductividad térmica de una mezcla líquida de 10% metanol, 40% etanol y 50% éter dietílico (porcentaje molar) a 20 °C. A esa temperatura, la conductividad térmica de los compuestos puros es 0.203, 0.173, y 0.134 W/m·K, respectivamente (Perry, Manual del Ingeniero Químico).

RESPUESTA: 0.148 W/m·K

**EJERCICIO 33**

El acetonitrilo, el más simple de los nitrilos, es un líquido incoloro empleado como solvente polar aprótico con aplicaciones en síntesis orgánica, así como en la purificación del butadieno. Se obtiene como subproducto en la fabricación de acrilonitrilo. Entre sus ventajas destacan su miscibilidad con agua, que es líquido en un amplio rango de temperaturas, y su capacidad de disolver una gran cantidad de sustancias iónicas y no polares debido a su elevado momento dipolo. Su baja viscosidad y escasa reactividad lo hacen útil como fase móvil en cromatografía líquida de alta resolución (HPLC, High Performance Liquid Chromatography). En dosis pequeñas es sólo moderadamente tóxico.

<b>ACETONITRILLO</b>	Fórmula molecular	CH <sub>3</sub> -CN
$\begin{array}{c} \text{H} \\   \\ \text{H}-\text{C}-\text{C}\equiv\text{N} \\   \\ \text{H} \end{array}$	Punto de fusión	-45 °C
	Punto de ebullición	81.6 °C
	Temperatura crítica	275.35 °C
	Presión crítica	48.3 bar
	Volumen molar crítico	173 cm <sup>3</sup> /mol
	Factor acéntrico	0.327
	Densidad de líquido (20 °C)	0.782 g/cm <sup>3</sup>
	Momento dipolo	3.5 debye

- (A) Estimar la conductividad térmica del vapor de acetonitrilo a 147 °C y 1 atm.  
 (B) Estimar la conductividad térmica del acetonitrilo líquido a 15 °C.  
 (C) Estimar la conductividad térmica de una solución acuosa de acetonitrilo al 30% peso a 15 °C.

RESPUESTA: (A)  $7.6 \times 10^{-3}$  W/m·K; (B) 0.201 W/m·K; (C) 0.417 W/m·K

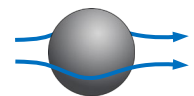
**EJERCICIO 34**

La composición (en base peso) del pollo es 66% agua, 18.1% proteína, 15.1% grasa y 0.8% cenizas, y su temperatura de congelamiento inicial es -2.2 °C. ¿Cuál es su conductividad térmica (empleando el modelo paralelo) y su fracción peso de hielo cuando está congelado -5 °C?

RESPUESTA: 1.319 W/m·K, 47.5% hielo

**EJERCICIO 35**

Para enfriar una esfera metálica de 1 plg de diámetro, cuya superficie se encuentra a 80 °C, se va a colocar en una corriente de agua a 10 °C moviéndose a 3.5 cm/s. Estimar el coeficiente de transferencia de calor por convección entre la esfera y el agua.



RESPUESTA: 961.17 W/m<sup>2</sup>·K

**EJERCICIO 36**

Adaptado de Incropera (2006)

Usted ha experimentado el enfriamiento por convección si alguna vez sacó la mano por la ventana de un vehículo en movimiento o si la sumergió en una corriente de agua. Si la superficie de la mano se asume a una temperatura constante de 30 °C, estimar la rapidez con que se pierde calor por convección para (A) una velocidad del vehículo de 35 km/h en aire a -5 °C, y (B) una velocidad de 20 cm/s en una corriente de agua a 10 °C.

RESPUESTA: (A) 1363.9 W/m<sup>2</sup> (B) 21444 W/m<sup>2</sup>

**EJERCICIO 37**

Aire a 20 °C fluye paralelamente sobre una placa metálica plana rectangular de 12" de largo (en la dirección del flujo) y 6" de ancho. La superficie de la placa se mantiene a una temperatura constante de 100 °C. Si se sabe que la placa está perdiendo calor con una rapidez de 31.9 watts, ¿cuál es la velocidad con la que el aire pasa sobre la placa?

RESPUESTA: 1.47 m/s

**EJERCICIO 38**

Adaptado de Welty, Wicks y Wilson (1997).

Por el interior de una tubería de acero de 8 plg cédula 140, de 6 m de longitud, fluyen 4500 kg/h de vapor saturado a 230 °C. Estimar el coeficiente de transferencia de calor por convección del vapor a la pared interior de la tubería.

NOTA: Asumir que todas las propiedades del vapor son iguales a las del vapor saturado a 230 °C (esta suposición se justifica en el caso de tuberías bien aisladas, porque la temperatura de la pared va a ser apenas unos grados diferente que la del fluido).

RESPUESTA: 269.6 W/m<sup>2</sup>·K

**EJERCICIO 39**

El granizo se forma cuando en una nube de tormenta hay fuertes corrientes de aire hacia arriba, un alto contenido de humedad, y una buena porción de la nube está a temperaturas bajo cero. Para una partícula de granizo de 4.7 mm de diámetro, que cae a una velocidad de 5.8 m/s en aire a 10 °C y 0.5 atm, estimar el coeficiente de transferencia de calor por convección entre el granizo y el aire.

RESPUESTA: 108.8 W/m<sup>2</sup>·K

**EJERCICIO 40**

Para leer la historia completa, visitar <http://tecnocruzfierra.com/cursos/ fenomenos/vaca-esferica.pdf>

Una vaca se queda fuera del establo en una fría noche invernal. La vaca está tan asustada que se queda inmóvil. El granjero se da cuenta de que la vaca no está en el granero, pero no quiere tener que salir a buscarla porque ya está listo para irse a dormir. Ya que el granjero sabe que la vaca puede sobrevivir durante la noche si pierde calor con una rapidez menor a 350 watts, se le ocurre hacer primero algunos cálculos para decidir si debe salir a buscarla.



La temperatura ambiente es 4 °C (una temperatura típica de un refrigerador de carnicería) y no sopla viento. La piel de la vaca tiene una temperatura superficial de 28 °C. Estimar la rapidez con la que la vaca pierde calor (en watts) si se asume que la vaca es:

- (A) una esfera de 1.1 m de diámetro.
- (B) un cilindro horizontal de 80 cm de diámetro y 1.4 m de longitud (usar el área total del cilindro, asumiendo que el coeficiente de transferencia de calor de la superficie lateral aplica también para los extremos del cilindro).

RESPUESTA: (A) 239.2 W, (B) 441.9 W

**EJERCICIO 41**

Se desea estimar cuánto calor pierde un foco incandescente de 40 W hacia el aire circundante. El foco se puede aproximar como una esfera de 50 mm de diámetro con una temperatura superficial de 125 °C, y el aire lejos del foco se encuentra a 27 °C. Calcular qué porcentaje de la energía consumida por el foco se pierde como calor por convección en los siguientes casos: (A) si el aire alrededor del foco se mueve a una velocidad de 0.5 m/s, y (B) si el aire alrededor del foco se encuentra en reposo.

RESPUESTA: 26.2%, 16.3%

**EJERCICIO 42**

Una tubería horizontal de 1 plg de diámetro externo y 2.5 m de longitud se encuentra en aire a 20 °C y 1 atm de presión absoluta. La superficie externa de la tubería está a una temperatura uniforme de 100 °C. Calcular la rapidez con la que la tubería pierde calor en los siguientes casos: **(A)** si el aire circundante se encuentra en reposo; **(B)** si el aire circundante se mueve perpendicularmente a la tubería con una velocidad de 0.5 m/s.

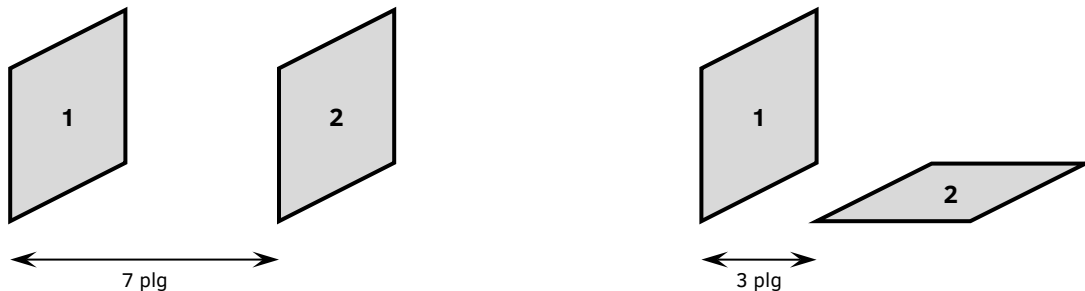
RESPUESTA: (A) 130.8 W; (B) 226.3 W

**EJERCICIO 43**

Un estudiante de ingeniería química desea hacer una demostración de la transferencia de calor por radiación. Para ello emplea dos superficies cuadradas de 4 plg de lado (que pueden asumirse como cuerpos negros) y las coloca verticalmente una frente a otra a una distancia de 7 plg. Las temperaturas de las superficies son  $T_1 = 200$  °C y  $T_2 = 20$  °C, respectivamente

**(A)** ¿Cuánto calor se está transfiriendo por radiación de la superficie 1 a la 2?

**(B)** Por un descuido, la placa 2 se cae y queda horizontal. ¿Cuánto calor se transfiere ahora?



RESPUESTA: (A) 2.13 W, (B) 1.25 W

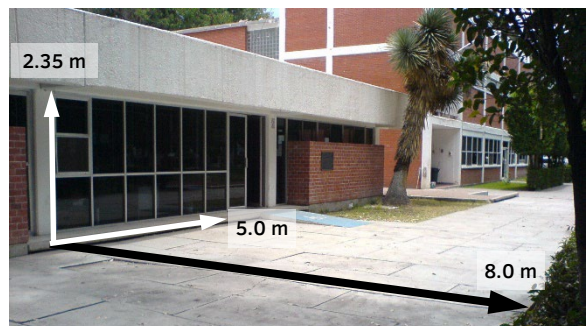
**EJERCICIO 44**

Un estudiante llevó a cabo una demostración experimental de la transferencia de calor por radiación entre dos discos metálicos paralelos (pueden asumirse cuerpos negros). Ambos discos miden 18.8 cm de diámetro y sus temperaturas se mantenían constantes a 30 y 150 °C, respectivamente. El estudiante determinó que la rapidez de transferencia de calor por radiación fue 22.3 watts. Sin embargo, olvidó medir la distancia entre los discos, y es un dato que necesita para su reporte. A partir de la información conocida, calcule a qué distancia se encontraban los discos.

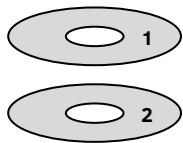
RESPUESTA: 4.7 cm.

**EJERCICIO 45**

De 2013 a 2019, tuve mi oficina en el edificio K, junto al Laboratorio de Alimentos. Me gustaba mucho esa oficina, sobre todo porque tiene un gran ventanal con muy buena vista al jardín. El único problema es que, en verano, el sol calienta el piso de concreto que está enfrente, y se siente el calor irradiado hacia la ventana. Si en un día soleado la temperatura del suelo llega a 55 °C, la ventana está a 25 °C, y asumiendo que la emisividad del concreto del suelo es 0.88 y la emisividad de la ventana es 0.91, estimar la rapidez de transferencia de calor por radiación, del suelo a la ventana de esa oficina.



RESPUESTA: 754 W.

**EJERCICIO 46**

En un experimento demostrativo de transferencia de calor por radiación, se colocan dos rondanas idénticas, paralelamente, a una distancia de  $\frac{1}{2}$  plg. Las rondanas tienen  $1\frac{1}{2}$  plg de diámetro externo, con una perforación de  $\frac{1}{2}$  plg de diámetro. Determinar el factor de visión de la rondana 1 a la rondana 2.

RESPUESTA:  $F_{1-2} = 0.439$

**EJERCICIO 47**

Estimar la difusividad del sistema metano-etano a  $20\text{ }^\circ\text{C}$  y  $1\text{ atm}$  aplicando la teoría cinética de Chapman-Enskog.

RESPUESTA:  $0.148\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 48**

Estimar la difusividad del vapor de n-octano en aire a  $75\text{ }^\circ\text{C}$  y  $0.8\text{ bar}$ .

RESPUESTA:  $0.109\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 49**

Estimar la difusividad del amoníaco en argón, a  $255\text{ K}$  y  $1\text{ bar}$ , aplicando (A) la teoría cinética de Chapman-Enskog y (B) el método de Fuller. En ambos casos, calcular el porcentaje de error sabiendo que el valor experimental de la difusividad a  $255\text{ K}$  y  $1\text{ bar}$  es  $0.152\text{ cm}^2/\text{s}$  (Srivastava, 1962; citado en Reid, 1987).

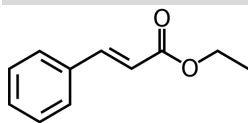
Srivastava y Srivastava (1962) Journal of Chemical Physics, 36:2616.  
Reid, Prausnitz y Poling (1987). "The Properties of Gases and Liquids", McGraw-Hill.

RESPUESTA: (A)  $0.155\text{ cm}^2/\text{s}$ , (B)  $0.171\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 50**

El éter dietílico ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{-O-C}_2\text{H}_5$ ) es un compuesto volátil altamente inflamable, muy utilizado en laboratorios e industrias de procesos químicos, y que antiguamente se usó como anestésico. Como es más denso que el aire, su vapor tiende a acumularse en las zonas bajas, aumentando el riesgo de una explosión. Estimar la difusividad del vapor de éter dietílico a  $50\text{ }^\circ\text{C}$  y  $1.2\text{ atm}$ .

RESPUESTA:  $0.0854\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 51**

El cinamato de etilo  $\text{C}_6\text{H}_5\text{-CH=CH-COO-CH}_2\text{-CH}_3$  ( $176.21\text{ g/mol}$ ) es un componente del aceite esencial de canela (en inglés: cinnamon), responsable en parte de su olor característico. Estimar la difusividad del cinamato de etilo en aire, a  $20\text{ }^\circ\text{C}$  y  $0.8\text{ atm}$ .

RESPUESTA:  $0.0717\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 52**

Estimar la difusividad en una mezcla equimolar de nitrógeno y etano, a  $15\text{ }^\circ\text{C}$  y  $47\text{ atm}$ .

RESPUESTA:  $0.00221\text{ cm}^2/\text{s}$

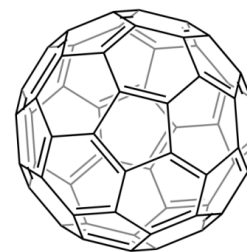
**EJERCICIO 53**

Estimar la difusividad del tolueno en una mezcla  $5\%$  mol tolueno –  $95\%$  mol benceno, en fase gas a  $400\text{ }^\circ\text{C}$  y  $100\text{ atm}$ .

RESPUESTA:  $8.27 \times 10^{-4}\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 54**

El fullereno C<sub>60</sub> es un compuesto formado exclusivamente por 60 átomos de carbono unidos en una estructura geométrica semejante a un balón de fútbol (ocasionalmente se le llamó "futboleno"). Fue descubierto en 1985 y tiene un diámetro estimado de van der Waals de 1.01 nm. El fullereno es ligeramente soluble en solventes orgánicos formando soluciones color violeta. En agua, es escasamente soluble y forma un complejo de color ámbar conocido como fullereno hidratado (C<sub>60</sub>·24H<sub>2</sub>O) con un diámetro aproximado de 1.7 nm. Empleando el modelo de Stokes-Einstein, estimar la difusividad del fullereno en disulfuro de carbono y en agua a 20°C.



RESPUESTA:  $1.18 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $2.51 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 55**

Estimar el paracoro de los siguientes compuestos: (A) n-hexano, (B) iso-octano, (C) metil-terbutil-éter, (D) fenol, (E) tiofeno.

RESPUESTA: (A) 270, (B) 343.7, (C) 245.4, (D) 219.4, (E)  $188.3 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$

**EJERCICIO 56**

Estimar el coeficiente de difusión del fenol en solución diluida en acetona a 15 °C.

RESPUESTA:  $6.017 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$

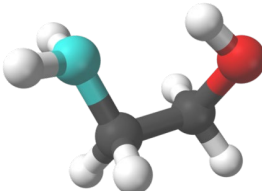
**EJERCICIO 57**

Estimar la difusividad del agua en acetona líquida a 0 °C, empleando el método de Tyn y Calus. La viscosidad de la acetona a 0 °C es  $3.197 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

RESPUESTA:  $4.23 \times 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 58**

La *etanolamina* (también llamada 2-aminoetanol o monoetanolamina, abreviada MEA) es un compuesto orgánico que es a la vez una amina primaria y un alcohol primario. A temperatura ambiente es un líquido viscoso incoloro, inflamable y corrosivo con olor similar al amoníaco. Se emplea en solución acuosa para remover gases ácidos como el H<sub>2</sub>S y el CO<sub>2</sub> de corrientes gaseosas. También se emplea como materia prima en la producción de detergentes, emulsificantes, medicamentos y varios intermediarios químicos.

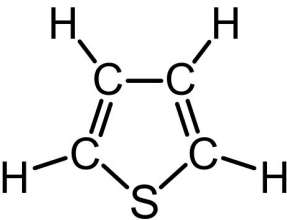
<p><b>ETANOLAMINA</b> (2-aminoetanol)</p> 	Fórmula molecular	NH <sub>2</sub> -CH <sub>2</sub> -CH <sub>2</sub> -OH
	Número CAS	141-43-5
	Punto de fusión	10.35 °C
	Entalpía de fusión	N/D
	Punto de ebullición	170.3 °C
	Temperatura crítica	340 °C
	Presión crítica	44.5 bar
	Volumen molar crítico	196 cm <sup>3</sup> /mol
	Densidad de líquido	1.012 g/cm <sup>3</sup>
	Momento dipolo	2.6 debye

N/D = no disponible.

Estimar la difusividad de la etanolamina a dilución infinita en agua a 30 °C empleando (A) el método de Wilke-Chang, y (B) el método de Tyn y Calus.

**EJERCICIO 59**

El *tiofeno* es un compuesto heterocíclico aromático formado por un anillo de cinco miembros con un átomo de azufre. Este compuesto y sus derivados se encuentran de forma natural en el petróleo en concentraciones de 1-3%, por lo que son una de las fuentes de contaminación atmosférica por azufre. Se pueden eliminar de los combustibles mediante un proceso de *hidrodesulfurización*, en el que se emplea hidrógeno y un catalizador de molibdeno para convertir el tiofeno y sus derivados en hidrocarburos y sulfuro de hidrógeno, que puede separarse con mayor facilidad.

<b>TIOFENO</b>		
	Fórmula molecular	$C_4H_4S$
	Número CAS	110-02-1
	Punto de fusión	$-38\text{ }^\circ\text{C}$
	Punto de ebullición	$84\text{ }^\circ\text{C}$
	Temperatura crítica	$306.3\text{ }^\circ\text{C}$
	Presión crítica	56.9 bar
	Volumen molar crítico	$219\text{ cm}^3/\text{mol}$
	Factor acéntrico	0.196
	Densidad de líquido	$1.059\text{ g/cm}^3$ @ $25\text{ }^\circ\text{C}$
	Viscosidad de líquido	$0.871\text{ cP}$ @ $0\text{ }^\circ\text{C}$ $0.643\text{ cP}$ @ $22.5\text{ }^\circ\text{C}$

(A) Calcular la difusividad del vapor de tiofeno en aire a  $50\text{ }^\circ\text{C}$  y 2.5 atm con la teoría cinética de Chapman-Enskog.

(B) Calcular la difusividad de tiofeno a dilución infinita en agua a  $25\text{ }^\circ\text{C}$  por el método de Tyn y Calus.

RESPUESTA: (A)  $0.0435\text{ cm}^2/\text{s}$ , (B)  $1.087 \times 10^{-5}\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 60**

Estimar la difusividad del cloruro de calcio a dilución infinita en solución acuosa a  $47\text{ }^\circ\text{C}$ .

**EJERCICIO 61**

El hidróxido de sodio NaOH es un álcali fuerte que se puede emplear en solución diluida para ajustar el pH en algunas situaciones. Estimar la difusividad del NaOH en solución acuosa diluida a  $72\text{ }^\circ\text{C}$ .

RESPUESTA:  $4.73 \times 10^{-5}\text{ cm}^2/\text{s}$

**EJERCICIO 62**

Para un equipo de transferencia de masa, que opera a  $25\text{ }^\circ\text{C}$  y 0.8 atm, se sabe que el coeficiente de transferencia de masa es  $k_G^0 = 0.272\text{ kmol/atm}\cdot\text{m}^2\cdot\text{h}$ . El mismo equipo se va a utilizar para evaporar pentano, bajo las mismas condiciones de temperatura y presión. En la superficie donde ocurre la evaporación, la presión parcial de pentano es igual a su presión de vapor ( $0.673\text{ atm}$  a  $25\text{ }^\circ\text{C}$ ), y el aire lejos de dicha superficie se puede asumir libre de pentano. Determinar los coeficientes de transferencia de masa  $k_G$ ,  $k_C$  y  $k_y$ .

RESPUESTA:  $k_G = 0.595\text{ kmol/atm}\cdot\text{m}^2\cdot\text{h}$ ,  $k_C = 14.56\text{ m/h}$ ,  $k_y = 0.476\text{ kmol/m}^2\cdot\text{h}$

**EJERCICIO 63**

Una placa cuadrada de naftalina de 12 cm de lado se encuentra orientada paralela a una corriente de aire que se mueve a  $0.473\text{ m/s}$ . El aire se encuentra a  $25\text{ }^\circ\text{C}$  y 1 atm (presión absoluta). La difusividad de la naftalina en el aire, a las condiciones del sistema, es  $0.0586\text{ cm}^2/\text{s}$  y su presión de vapor a  $25\text{ }^\circ\text{C}$  es  $0.2\text{ mmHg}$ . Calcular la rapidez con la que se está sublimando la naftalina (en  $\text{mol/m}^2\cdot\text{s}$ ).

RESPUESTA:  $2.8335 \times 10^{-5}\text{ mol/m}^2\cdot\text{s}$

**EJERCICIO 64**

Se necesita promover el crecimiento de un microorganismo aerobio en un medio de cultivo líquido. Para mantener la concentración necesaria de oxígeno disuelto, se va a burbujear oxígeno puro en el fondo del tanque. Las burbujas de oxígeno tienen un diámetro promedio de 2.5 mm. El líquido se mantiene sin agitación, por lo que las burbujas ascienden sólo por flotación. El sistema se mantiene a 30 °C y 1 atm. La densidad y viscosidad del líquido son, respectivamente, 1.15 g/cm<sup>3</sup> y 3.3 cP. El oxígeno es sólo ligeramente soluble en el medio de cultivo (se puede asumir sistema diluido) y su difusividad en el líquido es  $2.1 \times 10^{-5}$  cm<sup>2</sup>/s. Estimar el valor del coeficiente de transferencia de masa  $k_L$ .

RESPUESTA:  $7.66 \times 10^{-5}$  m/s**EJERCICIO 65**

El granizo se forma cuando en una nube de tormenta hay fuertes corrientes de aire hacia arriba, un alto contenido de humedad, y una buena porción de la nube está a temperaturas bajo cero. Considérese una partícula de granizo aproximadamente esférica, de 4.7 mm de diámetro, que se encuentra en una nube a una temperatura de -10 °C y una presión de 0.5 atm. La velocidad del aire, relativa al granizo, es 5.8 m/s. La presión de vapor de agua en la superficie del granizo es 265 Pa y la presión parcial del vapor de agua en la nube es 610 Pa. Estimar el coeficiente de transferencia de masa (en mol/Pa·m<sup>2</sup>·s) y la densidad de flujo molar (en mol/m<sup>2</sup>·s) del vapor de agua que se está condensando en la superficie del granizo.

NOTA: Para gases a baja presión, la viscosidad es independiente de la presión, pero la densidad sí depende de la presión. Despreciar cualquier efecto de la transferencia de calor en este ejercicio.

RESPUESTA:  $7.36 \times 10^{-5}$  mol/Pa·m<sup>2</sup>·s, 0.0254 mol/m<sup>2</sup>·s**EJERCICIO 66**

El exceso de acetona se quita de una lámina plástica durante su fabricación, dejando que se evapore en una corriente de aire que fluye de forma paralela a la superficie de la lámina. La lámina mide 60 cm en la dirección del flujo. La corriente de aire se encuentra a 40 °C y 1 atm (presión total absoluta), fluye a 47 cm/s, y tiene una cantidad residual de vapor de acetona (30 mmHg). Determinar la rapidez promedio con la que se transfiere la acetona de la lámina al aire (en mol/m<sup>2</sup>·s).

NOTA: Las propiedades de la mezcla que se necesitan para los números de Reynolds y Schmidt deben ser estimadas a la concentración promedio de la película. No se puede asumir que el sistema es diluido.

**DATOS ADICIONALES:**

- ★ Presión de vapor de la acetona a 40 °C: 0.5576 atm.
- ★ Difusividad del vapor de acetona en aire a 40 °C y 1 atm: 0.1338 cm<sup>2</sup>/s.
- ★ Viscosidad del vapor de acetona pura a 40 °C y 1 atm:  $7.884 \times 10^{-6}$  Pa·s.

RESPUESTA: 0.0674 mol/m<sup>2</sup>·s

## MATERIAL ADICIONAL

El material incluido en este anexo puede emplearse para reforzar en el estudiante algunas competencias adicionales o para proporcionar herramientas complementarias que pueda aplicar en cursos subsecuentes, pero no es indispensable para el desarrollo del curso “Mecanismos de Transferencia”. Si el docente considera que beneficia al estudiante, puede proporcionarlo durante el desarrollo de los temas correspondientes. Este material se lista a continuación, con una breve descripción de su intención didáctica.

- ★ **Alfabeto griego.** Generalmente, al iniciar el curso, el estudiante ya conoce previamente las letras griegas más comunes ( $\alpha$  alfa,  $\beta$  beta,  $\gamma$  gamma, etcétera). Sin embargo, es frecuente que en el estudio de Fenómenos de Transporte se empleen algunas de las letras menos comunes ( $\xi$  xi,  $\tau$  tau,  $\omega$  omega, etcétera) que le ocasionan dificultades durante el desarrollo del curso. También es común que se confundan algunas letras debido a un trazo descuidado al escribirlas ( $\delta$  delta con  $\sigma$  sigma,  $\phi$  fi con  $\theta$  theta, etcétera) o que no se distingan correctamente las mayúsculas y las minúsculas ( $\Phi$  fi mayúscula con  $\phi$  minúscula,  $\Psi$  psi mayúscula con  $\psi$  psi minúscula, etcétera).
- ★ **Propiedades físicas de importancia en Fenómenos de Transporte.** El éxito académico en esta área de estudio se ve potenciado al tener una mayor familiaridad con las propiedades físicas de un sistema que influyen en sus características de transferencia de momentum, calor o masa. Es conveniente que los alumnos conozcan estas propiedades, el símbolo con que generalmente se representan, así como sus unidades (del Sistema Internacional de Unidades y otras unidades de uso común). El mayor beneficio se obtiene cuando el alumno tiene idea del orden de magnitud de estas propiedades, pues permite detectar errores comunes en la solución de problemas. Por esta razón, se incluyen también tablas con algunos valores representativos.
- ★ **Propiedades de algunas sustancias selectas.** Esta tabla incluye una selección de compuestos inorgánicos y orgánicos (identificados por fórmula condensada, fórmula semidesarrollada o nombre, y por número CAS) Para cada sustancia se lista: masa molar, punto de fusión, punto de ebullición, propiedades del punto crítico, factor acéntrico y momento dipolo. La intención es tener una fuente de consulta rápida para ejercicios selectos, agilizando los tiempos de solución.
- ★ **Propiedades termofísicas del agua y del aire.** Estas tablas son de consulta esencial para cualquier ejercicio que involucre estas sustancias. Se listan diversas propiedades en función de la temperatura, incluyendo densidad, viscosidad, viscosidad cinemática, conductividad térmica, número de Prandtl, entre otras.
- ★ **Sistema Internacional de Unidades.** Al abordar el tema del análisis dimensional al inicio de la Unidad 2, es conveniente iniciar con una discusión en clase sobre los sistemas de unidades, haciendo énfasis en el Sistema Internacional (SI), dada su aplicación casi universal. El uso correcto de las unidades en sustituciones y resultados es indispensable para cualquier ingeniero, representando una competencia que debe ser promovida tempranamente en sus estudios. La descripción de las unidades fundamentales se ha actualizado para ser consistente con la redefinición de 2019 y se incluyen los nuevos prefijos para múltiplos y submúltiplos agregados en 2022.
- ★ **Dimensiones de las cantidades físicas.** Ésta es una versión más completa de la Tabla 2.3, que incluye algunas magnitudes físicas de uso menos frecuente. En el desarrollo de algunos ejercicios, puede resultar conveniente que el alumno consulte esta tabla, en vez de deducir las dimensiones a partir de las unidades de cada cantidad física involucrada.

- ★ **Ley de Newton de la viscosidad, ley de Fourier de la conducción, ley de Fick de la difusión.** Aquí aparecen las expresiones matemáticas de las tres leyes de transferencia molecular en cada uno de los sistemas de coordenadas de uso común (rectangulares, cilíndricas y esféricas). Ya que la aplicación matemática de estas leyes en los problemas de perfiles de velocidad, temperatura y concentración se cubre en el siguiente curso (Balances de Momento, Calor y Masa), no se requiere su aplicación en este curso, pero puede ser conveniente familiarizar al alumno de forma temprana con estos tres sistemas de coordenadas. Junto con la ley de Newton de la viscosidad se incluyen también el gradiente de velocidad y la rapidez de deformación en los tres sistemas de coordenadas.
- ★ **Métodos de estimación para viscosidad, conductividad térmica, difusividad, volumen de líquido saturado, tensión superficial, paracoro.** Estos documentos presentan en varios métodos de estimación (incluyendo los detallados en este manual de apuntes), seleccionados con base en su facilidad de uso o su aplicabilidad y confiabilidad. Su formato compacto los hace convenientes como material de apoyo durante las evaluaciones a tiempo restringido y para consulta futura.
- ★ **Correlaciones para transferencia de calor y transferencia de masa por convección.** Las correlaciones incluidas son solamente una pequeña muestra del gran número de correlaciones disponibles en la bibliografía, con la intención de facilitar la resolución de ejercicios de práctica.

La versión más reciente de estos documentos, y algunos otros que pueden ser de utilidad para éste y otros cursos relacionados, están disponibles en la siguiente dirección de internet o con el código QR mostrado:

<https://tecno.cruzfierro.com/formularios/>



## ALFABETO GRIEGO

MAYÚSCULA	MINÚSCULA	NOMBRE
Α	α	alfa
Β	β	beta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	épsilon
Ζ	ζ	dseta
Η	η	eta
Θ	θ ϑ	theta
Ι	ι	iota
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mi

MAYÚSCULA	MINÚSCULA	NOMBRE
Ν	ν	ni
Ξ	ξ	xi
Ο	ο	ómicron
Π	π	pi
Ρ	ρ ϱ	ro
Σ	σ ς	sigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ípsilon
Φ	φ ϕ	fi
Χ	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

NOTA: Aunque el nombre correcto de las letras  $\mu$  y  $\nu$  es “mi” y “ni”, frecuentemente en ciencia e ingeniería se les llama “mu” y “nu”.

# Propiedades físicas de uso frecuente en Fenómenos de Transporte

	SÍMBOLO	UNIDAD SI	DESCRIPCIÓN Y OBSERVACIONES
TRANSFERENCIA DE MOMENTUM	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	<b>Densidad:</b> Es la masa (cantidad de materia) por unidad de volumen. Otras unidades comunes incluyen g/cm <sup>3</sup> , kg/L y lb <sub>m</sub> /ft <sup>3</sup> .
	$\mu$	Pa·s (kg/m·s)	<b>Viscosidad:</b> Es una medida de la oposición de un fluido a fluir. Relaciona el esfuerzo aplicado a un fluido con la rapidez con la que se deforma, conforme a la ley de Newton de la viscosidad. También se le llama “viscosidad absoluta” o “viscosidad dinámica”. Otras unidades comunes incluyen el poise (1 Pa·s = 10 P), el centipoise (1 Pa·s = 1000 cP), el micropoise (1 Pa·s = 1 × 10 <sup>7</sup> μP), y en el sistema inglés lb <sub>m</sub> /ft·s, lb <sub>r</sub> s/ft <sup>2</sup> y lb <sub>m</sub> /ft·h.
	$\nu$	m <sup>2</sup> /s	<b>Viscosidad cinemática:</b> Es el resultado de dividir la viscosidad entre la densidad $\nu = \mu / \rho$ . También se le denomina “difusividad de momentum”. Otras unidades comunes son cm <sup>2</sup> /s y ft <sup>2</sup> /h.
	$\sigma$	N/m (J/m <sup>2</sup> )	<b>Tensión superficial:</b> Es la tendencia de una superficie líquida a reducir su área y comportarse como una membrana elástica. Para aumentar la superficie de un líquido hay que “estirar” la superficie aplicando una fuerza. La tensión superficial se debe a las fuerzas intermoleculares no balanceadas en la superficie del líquido. Al hablar de tensión superficial, generalmente se refiere a una interfase líquido-aire; en las interfases líquido-líquido se le denomina “tensión interfacial”. La unidad de uso común en el sistema inglés es lb <sub>r</sub> /ft.
TRANSFERENCIA DE CALOR	$c_p$ $c_v$	J/kg·K	<b>Capacidad calorífica:</b> Es la cantidad de energía necesaria para aumentar un grado la temperatura de una sustancia. También se le llama “calor específico”, aunque este nombre no es del todo correcto. En gases, esta cantidad de energía es diferente si el cambio de temperatura se realiza a presión constante o a volumen constante ( $c_p$ y $c_v$ ). Para un gas ideal, se cumple la relación $c_v = c_p - R$ , donde $R$ es la constante universal de los gases. En líquidos y sólidos, $c_p$ y $c_v$ tienen prácticamente el mismo valor, por lo que se puede llamar simplemente capacidad calorífica $c$ , es frecuente llamarle usan $c_p$ por costumbre. Otras unidades de uso común son cal/g·°C, BTU/lb·°F, y cualquier otra unidad de energía entre masa y temperatura (así como las correspondientes unidades en sistema molar). En las unidades de capacidad calorífica, se puede usar indistintamente K o °C (R o °F en el sistema inglés) porque se refiere a una diferencia de temperatura.
	$k$	W/m·K	<b>Conductividad térmica:</b> Es una medida de la facilidad con la que se transfiere el calor por conducción a través de un material, con base en la ley de Fourier. A los materiales que tienen alta conductividad térmica se les denomina “conductores”, y a los que tienen baja conductividad térmica se les denomina “aislantes”. Otras unidades de uso común son cal/m·°C, BTU/ft·°F, etcétera. En las unidades de conductividad térmica, se puede usar indistintamente K o °C (R o °F en el sistema inglés) porque se refiere a una diferencia de temperatura.
	$\alpha$	m <sup>2</sup> /s	<b>Difusividad térmica:</b> Es una combinación de otras propiedades físicas que aparece frecuentemente en el análisis de transferencia de calor; está definida como la conductividad térmica dividida entre la densidad y la capacidad calorífica ( $\alpha = k / \rho c_p$ ). Relaciona la capacidad del material para conducir el calor con su capacidad para almacenar energía. Otras unidades comunes son cm <sup>2</sup> /s y ft <sup>2</sup> /h.
TRANSFERENCIA DE MASA	$M$	g/mol	<b>Peso molecular:</b> Es la cantidad de una sustancia que tiene el mismo número de moléculas que el número de átomos presentes en exactamente 12 gramos de carbono-12 (1 mol de <sup>12</sup> C). De manera práctica, equivale a la masa molecular expresada en gramos. El peso molecular se maneja en g/mol, kg/kmol o lb <sub>m</sub> /lbmol, aunque estrictamente la unidad SI del peso molecular debería ser kg/mol.
	$P_{vap}$	Pa	<b>Presión de vapor:</b> Es la presión parcial que tendría un vapor en equilibrio con su correspondiente fase líquida (o sólida). La presión de vapor no es una propiedad de la fase gaseosa, sino del líquido o sólido. También se le llama presión de saturación (en particular en el caso del agua). El punto de ebullición normal (o simplemente punto de ebullición) es la temperatura a la cual la presión de vapor es igual a 1 atm. Otras unidades comunes para presión son kPa, MPa, bar, atm, mmHg y psi (lb/plg <sup>2</sup> ).
	$D_{AB}$	m <sup>2</sup> /s	<b>Difusividad:</b> Es una medida de la tendencia de una sustancia a difundirse en otra. La difusividad se define con base en la ley de Fick de la difusión. No es propiedad de una sustancia pura, sino de una mezcla (por eso tiene dos subíndices). Otras unidades comunes son cm <sup>2</sup> /s y ft <sup>2</sup> /h.

NOTA: La simbología empleada no es única, algunos autores emplean diferentes símbolos para algunas de estas propiedades.

## EJEMPLOS DE PROPIEDADES FÍSICAS DE FLUIDOS COMUNES

(aproximadas, a temperatura ambiente)

Sustancia	Densidad ( $\rho$ )	Viscosidad ( $\mu$ )	Viscosidad cinemática ( $\nu$ )	Tensión superficial ( $\sigma$ )
Agua	1000 kg/m <sup>3</sup>	~1 cP	1×10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s	0.072 N/m
Acetona	791 kg/m <sup>3</sup>	0.308 cP	3.9×10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	0.024 N/m
Glicerina	754 kg/m <sup>3</sup>	1850 cP	1.47×10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> /s	0.063 N/m
Mercurio	13600 kg/m <sup>3</sup>	1.5 cP	1.24×10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s	0.484 N/m
Aire (1 atm)	1.2 kg/m <sup>3</sup>	0.018 cP	1.5×10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> /s	(no aplica)

## EJEMPLOS DE PROPIEDADES TÉRMICAS DE SUSTANCIAS COMUNES

(aproximadas, a temperatura ambiente excepto donde se indica)

Sustancia	Capacidad calorífica ( $c_p$ )	Conductividad térmica ( $k$ )	Difusividad térmica ( $\alpha$ )
Aire	1007 J/kg·K	0.025 W/m·K	2.3×10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> /s
Helio	5193 J/kg·K	0.15 W/m·K	1.8×10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s
Agua	4180 J/kg·K	0.6 W/m·K	1.7×10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s
Glicerina	2400 J/kg·K	0.29 W/m·K	9.35×10 <sup>-8</sup> m <sup>2</sup> /s
Vidrio	835 J/kg·K	1.1 W/m·K	7.5×10 <sup>-7</sup> m <sup>2</sup> /s
Hielo (0 °C)	2040 J/kg·K	2.0 W/m·K	1×10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
NaCl	854 J/kg·K	7.1 W/m·K	3.84×10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup> /s
Mercurio	139 J/kg·K	8.5 W/m·K	4.5×10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> /s
Plomo	129 J/kg·K	34.7 W/m·K	2.4×10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> /s
Aluminio	903 J/kg·K	273 W/m·K	9.7×10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> /s
Cobre	385 J/kg·K	401 W/m·K	1.16×10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s
Plata	235 J/kg·K	424 W/m·K	1.7×10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s
Diamante	509 J/kg·K	2300 W/m·K	1.29×10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> /s

## EJEMPLOS DE PRESIONES DE VAPOR

Sustancia	Temperatura	Presión de vapor ( $P_{\text{vap}}$ )
hielo	-10 °C	0.260 kPa
agua	0 °C	0.61 kPa
	20 °C	2.3 kPa
	100 °C	101.3 kPa
etanol	20 °C	5.7 kPa
benceno	20 °C	10.3 kPa
acetona	20 °C	24.4 kPa

## EJEMPLOS DE DIFUSIVIDADES

Sistema	Fase	Condiciones	Difusividad ( $D_{AB}$ )
agua en aire	gas	0 °C y 1 atm	0.22 cm <sup>2</sup> /s
acetona en aire	gas	0 °C y 1 atm	0.109 cm <sup>2</sup> /s
H <sub>2</sub> en aire	gas	0 °C y 1 atm	0.611 cm <sup>2</sup> /s
I <sub>2</sub> en aire	gas	0 °C y 1 atm	0.07 cm <sup>2</sup> /s
aire en agua	líquido	25 °C	2×10 <sup>-5</sup> cm <sup>2</sup> /s
H <sub>2</sub> en agua	líquido	25 °C	4.5×10 <sup>-5</sup> cm <sup>2</sup> /s
acetona en agua	líquido	25 °C	1.16×10 <sup>-5</sup> cm <sup>2</sup> /s
agua en acetona	líquido	25 °C	4.56×10 <sup>-5</sup> cm <sup>2</sup> /s

# Propiedades de sustancias selectas



$M$  - masa molecular,  $T_m$  - punto de fusión,  $T_b$  - punto de ebullición,  $T_c$  - temperatura crítica,  $P_c$  - presión crítica,  $\tilde{V}_c$  - volumen molar crítico,  $\omega$  - factor acéntrico,  $\mu_{\text{dip}}$  - momento dipolo

Sustancia	Número CAS	$M$	$T_m$	$T_b$	$T_c$	$P_c$	$\tilde{V}_c$	$\omega$	$\mu_{\text{dip}}$
		(g/mol)	(K)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)	(—)	(debye)
H <sub>2</sub>	1333-74-0	2.0159	13.83	20.27	32.19	13.13	64.1	-0.216	0
D <sub>2</sub>	7782-39-0	4.0316	18.63	22.13	38.35	16.62	60.3	-0.145	0
He	7440-59-7	4.0026	2.15	4.30	5.2	2.275	57.3	-0.390	0
Ne	7440-01-9	20.180	24.56	27.07	44.4	26.53	41.7	-0.040	0
Ar	7440-37-1	39.948	83.80	87.27	150.86	48.98	74.59	0	0
Kr	7439-90-9	83.800	115.77	119.74	209.4	55.0	91.2	0	0
Xe	7440-63-3	131.290	161.25	165.01	289.74	58.4	118.0	0	0
Rn	10043-92-2	220.018	202.15	209.80	377.0	63.0	140		0
aire	132259-10-0	28.964			[132.45]	[37.74]	[91.47]	[0.033]	0
N <sub>2</sub>	7727-37-9	28.013	63.15	77.35	126.2	34	89.2	0.038	0
O <sub>2</sub>	7782-44-7	31.999	54.36	90.17	154.58	50.43	73.4	0.022	0
O <sub>3</sub>	10028-15-6	47.998	80.65	161.80	261	55.7	89	0.212	0.53
H <sub>2</sub> O	7732-18-5	18.015	273.15	373.15	647.14	220.64	55.95	0.344	1.84
D <sub>2</sub> O	7789-20-0	20.028	276.96	374.55	643.89	216.71	56.26		1.87
CO	630-08-0	28.010	68.15	81.66	132.92	34.99	94.4	0.048	0.11
CO <sub>2</sub>	124-38-9	44.010	216.58	(SUBLIMA)	304.21	73.83	94.0	0.224	0
COS	463-58-1	60.080	135	223	378.8	63.5	136.3		0.71
CS <sub>2</sub>	75-15-0	76.141	164.5	319.45	552	79.0	160	0.111	0
C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	460-19-5	52.035	238.75	252.15	400	59.8	195	0.276	0
PH <sub>3</sub>	7803-51-2	33.998	139.37	185.42	324.50	65.4			0.57
NH <sub>3</sub>	7664-41-7	17.031	195.41	239.82	405.65	112.8	72.47	0.253	1.47
N <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	302-01-2	32.045	274.68	386.65	653.15	147	158	0.314	1.75
NO	10102-43-9	30.006	109.51	121.38	180.15	64.8	58.0	0.583	0.16
N <sub>2</sub> O	10024-97-2	44.013	182.33	184.67	309.57	72.45	97.4	0.141	0.16
N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	10544-72-6	92.011	261.95	302.22	431.01	101.0		1.007	0.50
SO <sub>2</sub>	7446-09-5	64.064	197.67	263.13	430.75	78.84	122.0	0.245	1.63
SO <sub>3</sub>	7446-11-9	80.063	289.95	317.90	490.85	82.1	127	0.424	0
F <sub>2</sub>	7782-41-4	37.997	53.48	84.95	144.12	51.72	66.5	0.053	0
Cl <sub>2</sub>	7782-50-5	70.906	172.19	239.12	417.15	77.1	124.0	0.069	0
Br <sub>2</sub>	7726-95-6	159.808	265.85	331.90	584.15	103.0	135.0	0.129	0
I <sub>2</sub>	7553-56-2	253.809	386.76	457.56	819.0	117	155.0		0
HF	7664-39-3	20.006	189.58	292.68	461.15	64.8	69	0.382	1.83
HCl	7647-01-0	36.461	158.97	188.15	324.65	83.1	81	0.132	1.11
HBr	10035-10-6	80.912	186.34	206.46	363.15	85.52	100	0.073	0.83
HI	10034-85-2	127.912	222.38	237.57	423.9	90.0	132.7	0.038	0.45
HCN	74-90-8	27.025	261	298.5	456.65	53.9	139	0.410	2.98
H <sub>2</sub> S	7783-06-4	34.081	187.62	212.84	373.53	89.63	98.5	0.094	0.97
H <sub>2</sub> Se	7783-07-5	80.976	207.42	228.25	411.0	89.2			0.24
SiH <sub>4</sub>	7803-62-5	32.122	88	161	269.7	48.4			0
SiF <sub>4</sub>	7783-61-1	104.08	177.5	182.8	259.0	37.2	202	0.386	0
SF <sub>6</sub>	2551-62-4	146.059	222.45	209.29	318.69	37.6	198.5	0.215	0
UF <sub>6</sub>	7783-81-5	352.07	337	324.96	503.35	45.31	250.0	0.277	0
Na	7440-23-5	22.99	370.65	1153	2573	350			0
Hg	7439-97-6	200.59	234.3	630	1765	1510	42.7		0

Sustancia	Número CAS	$M$	$T_m$	$T_b$	$T_c$	$P_c$	$\tilde{V}_c$	$\omega$	$\mu_{dip}$
		(g/mol)	(K)	(K)	(K)	(bar)	(cm <sup>3</sup> /mol)	(—)	(debye)
CH <sub>4</sub>	74-82-8	16.043	90.69	111.66	190.56	45.99	98.6	0.012	0
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	74-84-0	30.069	90.35	184.55	305.32	48.72	145.5	0.099	0
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	74-85-1	28.053	103.99	169.42	282.34	50.41	131	0.086	0
C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	74-86-2	26.037	192.35	188.4	308.3	61.38	112	0.191	0
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	74-98-6	44.096	85.47	231.02	369.83	42.48	200	0.152	0.08
CH <sub>2</sub> =CH-CH <sub>3</sub>	115-07-1	42.080	87.89	225.46	364.85	46.0	185	0.138	0.37
CH≡C-CH <sub>3</sub>	74-99-7	40.064	170.50	250.12	402.4	56.3	164	0.212	0.78
n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	106-97-8	58.122	134.79	272.66	425.12	37.96	255	0.200	0
iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	75-28-5	58.122	113.54	261.34	407.8	36.4	259	0.184	0.13
n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	109-66-0	72.150	143.43	309.22	469.7	33.7	311	0.252	0
n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	110-54-3	86.175	177.84	341.88	507.6	30.25	371	0.301	0
ciclopropano	75-19-4	42.080	145.73	240.34	398	55.4	162	0.128	0
ciclohexano	110-82-7	84.159	279.69	353.93	553.8	40.8	308	0.208	0
C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	71-43-2	78.112	278.68	353.24	562.05	48.95	256	0.210	0
C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> -CH <sub>3</sub>	108-88-3	92.138	178.16	383.79	591.75	41.08	316	0.264	0.38
C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> -C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	100-41-4	106.165	178.18	409.36	617.15	36.09	374	0.303	0.59
estireno	100-42-5	104.149	242.15	418.5	636	38.4	352	0.297	0.13
o-xileno	95-47-6	106.165	247.97	417.59	630.3	37.32	370	0.310	0.62
m-xileno	108-38-3	106.165	225.28	412.34	617.0	35.41	375	0.326	0.33
p-xileno	106-42-3	106.165	286.41	411.53	616.2	35.11	378	0.322	0
naftaleno	91-20-3	128.171	351.35	491.16	748.4	40.5	407	0.302	0
CH <sub>3</sub> -OH	67-56-1	32.042	175.49	337.69	512.5	80.84	117	0.566	1.70
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	64-17-5	46.068	159.05	351.80	514	61.37	168	0.644	1.69
1-propanol	71-23-8	60.095	147.00	370.93	536.8	51.69	219	0.621	1.55
2-propanol	67-63-0	60.095	183.65	355.39	508.3	47.65	222	0.663	1.58
1-octanol	111-87-5	130.228	257.65	468.33	652.3	27.83	509	0.570	1.72
fenol	108-95-2	94.111	314.05	455.04	694.25	61.3	229	0.443	1.22
H-CHO	50-00-0	30.026	181.15	252.15	420	65.9	85.1	0.168	2.33
CH <sub>3</sub> -CHO	75-07-0	44.053	149.65	293.35	466	55.7	154	0.262	2.75
H-COOH	64-18-6	46.026	281.50	374.04	588	58.1	125	0.313	1.41
CH <sub>3</sub> -COOH	64-19-7	60.052	289.77	391.04	591.95	57.86	177	0.467	1.70
C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> -COOH	65-85-0	122.121	394.85	522.35	751	44.7	344	0.603	
CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	67-64-1	58.079	178.50	329.22	508.2	47.01	209	0.307	2.88
CH <sub>3</sub> -CO-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	78-93-3	72.106	186.51	352.71	535.5	41.5	267	0.323	2.78
CH <sub>3</sub> -O-CH <sub>3</sub>	115-10-6	46.068	131.65	248.31	400.1	53.7	170	0.200	1.30
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -O-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	60-29-7	74.122	156.86	307.59	466.7	36.4	280	0.281	1.15
CH <sub>3</sub> -NH <sub>2</sub>	74-89-5	31.057	179.69	266.82	430.05	74.6	154	0.281	1.31
(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> NH	124-40-3	45.084	180.96	280.00	437.2	53.4	180	0.300	1.01
(CH <sub>3</sub> ) <sub>3</sub> N	75-50-3	59.110	155.85	276.02	433.25	40.7	254	0.206	0.61
C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> -NH <sub>2</sub>	62-53-3	93.128	266.85	457.17	699.0	53.1	273.9	0.380	1.13
CH <sub>3</sub> -CN	75-05-8	41.052	229.2	355.8	545.5	48.5	193	0.342	3.92
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -CN	107-12-0	55.079	180.35	370.35	561.3	42.6	242	0.350	4.05
CH <sub>3</sub> Cl	74-87-3	50.488	175.44	248.95	416.25	66.8	141	0.151	1.89
CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	75-09-2	84.933	176.00	312.79	510	60.8	185	0.199	1.60
CHCl <sub>3</sub>	67-66-3	119.378	209.74	334.33	536.4	54.72	239	0.222	1.04
CCl <sub>4</sub>	56-23-5	153.823	250.33	349.79	556.35	45.6	276	0.193	0
CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	75-71-8	120.913	115.19	243.45	385.10	41.3	217	0.179	0.51

Datos recopilados principalmente de: Green & Southard (2019) "Perry's Chemical Engineer's Handbook" 9<sup>th</sup> edición, Poling et al. (2000) "The Properties of Gases and Liquids" 5<sup>th</sup> edición, Speight (2005) "Lange's Handbook of Chemistry" 16<sup>th</sup> edición, Perry & Green (2004) "Perry Manual del Ingeniero Químico" 7<sup>a</sup> edición, Dean (1985) "Lange Manual de Químico" 13<sup>a</sup> edición. Se ha hecho lo posible por validar la información contenida en esta tabla, pero no se puede dar garantía de su exactitud, por lo que no se recomienda su uso en la preparación de diseños finales de equipos industriales, procesos químicos, o sistemas de viaje a través del tiempo.

# PROPIEDADES TERMOFÍSICAS DEL AGUA SATURADA



Adaptado principalmente de NIST Chemistry Webbook, SRD 69 (<http://webbook.nist.gov/chemistry/liquid/>). Algunos datos tomados de Poling (2000) y Çengel (2015).

Se indica en el encabezado si los valores han sido multiplicados por un factor constante. Por ejemplo:  $\mu \times 10^3 = 1.7918$  significa  $\mu = 1.7918 \times 10^{-3}$  Pa·s.

		LÍQUIDO SATURADO									VAPOR SATURADO					
<i>T</i>	<i>P</i>	$\rho$	$c_p$	<i>h</i>	$\mu \times 10^3$	<i>k</i>	Pr	$\sigma \times 10^3$	$\beta \times 10^4$	$\lambda$	$\rho$	$c_p$	<i>H</i>	$\mu \times 10^6$	<i>k</i>	Pr
°C	bar	kg/m <sup>3</sup>	kJ/kg·K	kJ/kg	Pa·s	W/m·K	—	N/m	K <sup>-1</sup>	kJ/kg	kg/m <sup>3</sup>	kJ/kg·K	kJ/kg	Pa·s	W/m·K	—
0	0.0061121	999.792	4.2199	-0.04	1.7918	0.5610	13.478	75.648	-0.6760	2500.94	0.004851	1.8843	2500.90	9.2160	0.01707	1.0173
⊙ 0.01	0.0061165	999.793	4.2199	0.00	1.7912	0.5610	13.472	75.646	-0.6742	2500.91	0.004855	1.8844	2500.91	9.2163	0.01707	1.0173
2	0.007060	999.89	4.213	8.39	1.674	0.565	12.49	75.37	-0.3305	2496.17	0.005563	1.886	2504.56	9.26	0.0172	1.017
4	0.008135	999.93	4.208	16.8	1.567	0.569	11.60	75.08	-0.0005	2491.4	0.006365	1.888	2508.2	9.31	0.0173	1.017
6	0.009354	999.89	4.203	25.2	1.472	0.572	10.81	74.80	0.3085	2486.7	0.007266	1.890	2511.9	9.36	0.0174	1.017
10	0.01228	999.65	4.196	42.0	1.306	0.580	9.447	74.22	0.8757	2477.2	0.009407	1.895	2519.2	9.47	0.0176	1.017
15	0.01706	999.06	4.189	63.0	1.138	0.589	8.086	73.49	1.506	2465.4	0.01284	1.900	2528.3	9.59	0.0179	1.017
20	0.02339	998.16	4.184	83.9	1.002	0.598	7.004	72.74	2.066	2453.5	0.01731	1.906	2537.4	9.73	0.0182	1.017
25	0.03170	997.00	4.182	104.8	0.890	0.607	6.130	71.97	2.571	2441.7	0.02308	1.912	2546.5	9.87	0.0186	1.017
30	0.04247	995.61	4.180	125.7	0.797	0.615	5.415	71.19	3.032	2429.8	0.03042	1.918	2555.5	10.01	0.0189	1.017
35	0.05629	993.99	4.180	146.7	0.719	0.623	4.823	70.40	3.457	2417.9	0.03967	1.925	2564.5	10.16	0.0192	1.016
40	0.07385	992.18	4.180	167.5	0.653	0.631	4.328	69.60	3.853	2406.0	0.05124	1.931	2573.5	10.31	0.0196	1.016
45	0.09595	990.17	4.180	188.4	0.596	0.637	3.910	68.78	4.224	2394.0	0.06556	1.939	2582.4	10.47	0.0200	1.015
50	0.1235	988.00	4.182	209.3	0.547	0.644	3.553	67.94	4.575	2381.9	0.08315	1.947	2591.5	10.62	0.0204	1.015
55	0.1576	985.66	4.183	230.3	0.504	0.649	3.247	67.10	4.909	2369.8	0.1047	1.955	2600.1	10.77	0.0208	1.014
60	0.1995	983.16	4.185	251.2	0.466	0.654	2.983	66.24	5.229	2357.7	0.1304	1.965	2608.8	10.93	0.0212	1.014
65	0.2504	980.52	4.187	272.1	0.433	0.659	2.753	65.37	5.536	2345.4	0.1615	1.975	2617.5	11.10	0.0216	1.014
70	0.3120	977.73	4.190	293.1	0.404	0.663	2.552	64.47	5.834	2333.0	0.1984	1.986	2626.1	11.26	0.0221	1.013
75	0.3860	974.81	4.193	314.0	0.378	0.667	2.376	63.58	6.123	2320.6	0.2422	1.999	2634.6	11.43	0.0225	1.013
80	0.4741	971.77	4.197	335.0	0.354	0.670	2.220	62.67	6.405	2308.0	0.2937	2.012	2643.0	11.59	0.0230	1.014
85	0.5787	968.59	4.201	356.0	0.333	0.673	2.081	61.75	6.682	2295.3	0.3539	2.027	2651.3	11.76	0.0235	1.014
90	0.7018	965.30	4.205	377.0	0.314	0.675	1.958	60.82	6.954	2282.5	0.4239	2.043	2659.5	11.93	0.0240	1.015
95	0.8461	961.88	4.210	398.1	0.297	0.677	1.847	59.87	7.223	2269.5	0.5049	2.061	2667.6	12.10	0.0245	1.016
100	1.01325	958.35	4.216	419.2	0.282	0.679	1.749	58.91	7.489	2256.4	0.5982	2.080	2675.6	12.27	0.0251	1.017
110	1.434	950.9	4.228	461.4	0.255	0.682	1.580	56.96	8.016	2229.6	0.8269	2.124	2691.1	12.61	0.0262	1.021
120	1.989	943.1	4.244	503.8	0.232	0.683	1.441	54.97	8.545	2202.1	1.122	2.177	2705.9	12.96	0.0275	1.027
130	2.703	934.7	4.261	546.4	0.213	0.684	1.327	52.93	9.078	2173.7	1.497	2.239	2720.1	13.30	0.0288	1.035
140	3.615	926.1	4.283	589.2	0.197	0.683	1.232	50.86	9.624	2144.3	1.967	2.311	2733.4	13.65	0.0301	1.047
150	4.762	917.0	4.307	632.2	0.182	0.682	1.152	48.74	10.19	2113.7	2.547	2.394	2745.9	13.99	0.0316	1.060
160	6.182	907.4	4.335	675.5	0.170	0.680	1.085	46.59	10.77	2082.0	3.260	2.488	2757.4	14.34	0.0331	1.077
170	7.922	897.5	4.368	719.1	0.160	0.677	1.029	44.41	11.39	2048.8	4.122	2.594	2767.9	14.68	0.0347	1.096
180	10.03	887.0	4.405	763.1	0.150	0.673	0.982	42.19	12.05	2014.2	5.159	2.713	2777.2	15.03	0.0364	1.118
190	12.55	876.1	4.447	807.4	0.142	0.669	0.943	39.95	12.75	1977.9	6.395	2.844	2785.3	15.37	0.0382	1.143
200	15.55	864.7	4.496	852.3	0.134	0.663	0.910	37.67	13.50	1939.7	7.861	2.990	2792.0	15.71	0.0401	1.171
210	19.08	852.7	4.551	897.3	0.128	0.657	0.884	35.38	14.32	1899.6	9.588	3.150	2797.3	16.06	0.0421	1.202
220	23.20	840.2	4.615	943.6	0.122	0.650	0.863	33.07	15.22	1857.4	11.62	3.329	2800.9	16.41	0.0442	1.237
230	27.97	827.1	4.688	990.2	0.116	0.641	0.847	30.74	16.22	1812.7	13.99	3.528	2802.9	16.76	0.0464	1.276
240	33.47	813.4	4.772	1037.6	0.111	0.632	0.837	28.39	17.34	1765.4	16.75	3.754	2803.0	17.12	0.0487	1.319
250	39.76	798.9	4.870	1085.8	0.106	0.621	0.832	26.04	18.60	1715.2	19.97	4.011	2800.9	17.49	0.0513	1.369
260	46.92	783.6	4.986	1135.0	0.102	0.609	0.832	23.69	20.03	1661.6	23.71	4.308	2796.6	17.88	0.0540	1.425
270	55.03	767.5	5.123	1185.3	0.097	0.596	0.838	21.34	21.70	1604.4	28.07	4.656	2789.7	18.28	0.0571	1.490
280	64.17	750.3	5.289	1236.9	0.094	0.581	0.851	18.99	23.66	1543.0	33.16	5.073	2779.9	18.70	0.0606	1.565
290	74.42	731.9	5.493	1290.0	0.090	0.565	0.872	16.66	26.00	1476.7	39.13	5.582	2766.7	19.15	0.0647	1.652
300	85.88	712.1	5.750	1345.0	0.086	0.547	0.902	14.36	28.87	1404.7	46.17	6.220	2749.6	19.65	0.0696	1.755
310	98.65	690.7	6.085	1402.2	0.082	0.529	0.946	12.09	32.49	1325.7	54.54	7.045	2727.9	20.21	0.0758	1.877
320	112.84	667.1	6.537	1462.2	0.078	0.509	1.007	9.86	37.21	1238.4	64.64	8.159	2700.6	20.85	0.0839	2.027
330	128.58	640.8	7.186	1525.9	0.075	0.489	1.095	7.70	43.68	1140.2	77.05	9.753	2666.0	21.61	0.0949	2.219
340	146.01	610.7	8.208	1594.5	0.070	0.469	1.234	5.63	53.30	1027.3	92.76	12.24	2621.8	22.55	0.111	2.447
350	165.29	574.7	10.12	1670.9	0.066	0.447	1.490	3.67	69.92	892.7	113.6	16.69	2563.6	23.82	0.136	2.925
360	186.66	527.6	15.00	1761.7	0.060	0.426	2.126	1.88	107	719.8	143.9	27.36	2481.5	25.72	0.182	3.877
365	198.21	495.7	21.41	1817.8	0.057	0.416	2.920	1.08	147	605.2	166.3	41.80	2422.9	27.20	0.225	5.056
370	210.44	451.4	45.16	1890.7	0.052	0.425	5.532	0.39	257	443.8	201.8	96.60	2334.5	29.68	0.324	8.853
372	215.54	422.3	102.1	1935.3	0.049	0.467	10.72	0.16	452	340.3	226.8	207.4	2275.5	31.53	0.438	14.93
⊙ 373.99	220.64	322.0	∞	2083.1	0.047	∞	∞	0	∞	0	322.0	∞	2083.1	47.0	∞	∞

**OTROS DATOS:**  $M = 18.015$  g/mol.  $c_p^\circ = 1.7896 + 1.0674 \times 10^{-4}T + 5.8562 \times 10^{-7}T^2 - 1.9956 \times 10^{-10}T^3$  ( $c_p^\circ$  en kJ/kg·K,  $T$  en K, 273 K – 1800 K).

$\rho_{\text{hielo}} = 961.7$  kg/m<sup>3</sup> a 0 °C.  $\lambda_{\text{fus}} = 333.6$  kJ/kg a 0 °C.

⊙ – punto triple. ⊙ – punto crítico.  $T$  – temperatura de saturación.  $P$  – presión de saturación.  $\rho$  – densidad.  $c_p$  – capacidad calorífica a presión constante.  $h$  – entalpía de líquido.  $H$  – entalpía de vapor.  $\mu$  – viscosidad.  $k$  – conductividad térmica. Pr – número de Prandtl.  $\sigma$  – tensión superficial.  $\beta$  – coeficiente de expansión térmica.  $\lambda$  – entalpía de vaporización.  $M$  – peso molecular.  $c_p^\circ$  – capacidad calorífica de gas ideal a presión constante.  $\lambda_{\text{fus}}$  – entalpía de fusión.

# PROPIEDADES TERMOFÍSICAS DEL AIRE SECO (a 1 atm)



Adaptado principalmente de los datos a 0.1 MPa reportados en la Tabla 2-110 de Perry (2019) con algunos datos de la Tabla A.4 de Incropera y DeWitt (2006).

Se indica en el encabezado si los valores han sido multiplicados por un factor constante. Por ejemplo:  $\mu \times 10^6 = 8.76$  significa  $\mu = 8.76 \times 10^{-6}$  Pa·s.

$T$	$\rho$	$c_p$	$h$	$\mu \times 10^6$	$\nu \times 10^6$	$k$	$\alpha \times 10^6$	Pr
°C	kg/m <sup>3</sup>	kJ/kg·K	kJ/kg	Pa·s	m <sup>2</sup> /s	W/m·K	m <sup>2</sup> /s	—
-150	2.8664	1.026	247.8	8.76	3.06	0.0118	4.02	0.760
-125	2.3827	1.018	273.2	10.44	4.38	0.0142	5.87	0.747
-100	2.0386	1.013	298.4	11.99	5.88	0.0165	7.99	0.737
-75	1.7814	1.008	323.7	13.45	7.55	0.0186	10.37	0.728
-50	1.5819	1.006	348.8	14.83	9.37	0.0207	13.00	0.721
-40	1.5140	1.005	358.9	15.36	10.14	0.0215	14.12	0.718
-30	1.4517	1.004	369.0	15.88	10.94	0.0223	15.27	0.716
-20	1.3944	1.004	379.0	16.39	11.75	0.0230	16.46	0.714
-10	1.3414	1.004	389.1	16.89	12.59	0.0238	17.68	0.712
0	1.2923	1.003	399.1	17.39	13.45	0.0246	18.94	0.710
10	1.2467	1.004	409.2	17.87	14.34	0.0253	20.23	0.709
20	1.2041	1.004	419.3	18.35	15.24	0.0260	21.55	0.707
30	1.1644	1.004	429.3	18.83	16.17	0.0268	22.90	0.706
40	1.1272	1.005	439.4	19.29	17.11	0.0275	24.28	0.705
50	1.0923	1.005	449.5	19.75	18.08	0.0282	25.68	0.704
60	1.0596	1.006	459.6	20.20	19.07	0.0289	27.12	0.703
70	1.0287	1.007	469.7	20.65	20.07	0.0296	28.59	0.702
80	0.9996	1.008	479.8	21.09	21.10	0.0303	30.08	0.701
90	0.9720	1.009	489.9	21.53	22.15	0.0310	31.60	0.701
100	0.9460	1.010	500.0	21.96	23.21	0.0317	33.15	0.700
110	0.9213	1.011	510.1	22.39	24.30	0.0323	34.72	0.700
120	0.8979	1.013	520.3	22.81	25.40	0.0330	36.31	0.700
130	0.8756	1.014	530.4	23.22	26.52	0.0337	37.93	0.699
140	0.8544	1.016	540.6	23.64	27.66	0.0343	39.57	0.699
150	0.8342	1.017	550.8	24.04	28.82	0.0350	41.24	0.699
160	0.8149	1.019	561.0	24.45	30.00	0.0356	42.93	0.699
170	0.7966	1.020	571.2	24.85	31.19	0.0363	44.64	0.699
180	0.7790	1.022	581.4	25.24	32.41	0.0369	46.37	0.699
190	0.7622	1.024	591.7	25.64	33.64	0.0376	48.12	0.699
200	0.7460	1.026	601.9	26.03	34.89	0.0382	49.90	0.699
225	0.7086	1.031	627.6	26.98	38.08	0.0398	54.42	0.700
250	0.6747	1.036	653.5	27.92	41.38	0.0413	59.07	0.701
275	0.6440	1.041	679.4	28.84	44.79	0.0428	63.83	0.702
300	0.6159	1.047	705.5	29.74	48.29	0.0443	68.72	0.703
350	0.5665	1.058	758.1	31.50	55.61	0.0472	78.81	0.706
400	0.5244	1.070	811.2	33.20	63.31	0.0501	89.33	0.709
450	0.4881	1.081	864.8	34.85	71.39	0.0529	100.27	0.712
500	0.4566	1.093	919.1	36.45	79.83	0.0557	111.61	0.715
600	0.4043	1.115	1029.3	39.53	97.79	0.0611	135.50	0.722
700	0.3627	1.135	1141.8	42.48	117.1	0.0663	160.99	0.727
800	0.3289	1.154	1256.3	45.31	137.7	0.0714	188.07	0.732
900	0.3009	1.170	1372.6	48.04	159.6	0.0763	216.79	0.736
1000	0.2773	1.185	1490.6	50.68	182.8	0.0812	247.16	0.740
1250	0.2318	1.213	1790.4	56.95	245.7	0.0930	330.65	0.743
1500	0.1991	1.232	2095.7	62.85	315.7	0.1043	425.25	0.742

**OTROS DATOS:** Composición (% mol): 78.09% N<sub>2</sub>, 20.95% O<sub>2</sub>, 0.93% Ar, 0.03% CO<sub>2</sub>, 0.01% otros.  $M = 28.964$  g/mol.  $T_c = 132.45$  K.  $P_c = 30.74$  bar.  $c_p^\circ = 1.054 - 4.4 \times 10^{-4}T + 1.144 \times 10^{-6}T^2 - 8.114 \times 10^{-10}T^3 + 1.94 \times 10^{-13}T^4$  ( $c_p^\circ$  en kJ/kg·K,  $T$  en K, 230 K - 1500 K).

$T$  - temperatura.  $\rho$  - densidad.  $c_p$  - capacidad calorífica a presión constante.  $h$  - entalpía (la fuente no indica el estado de referencia).  $\mu$  - viscosidad.  $\nu$  - viscosidad cinemática.  $k$  - conductividad térmica.  $\alpha$  - difusividad térmica. Pr - número de Prandtl.  $M$  - peso molecular.  $T_c$  - temperatura crítica.  $P_c$  - presión crítica.  $c_p^\circ$  - capacidad calorífica de gas ideal a presión constante.

A fines del siglo XVIII, un grupo de científicos comisionados por el rey Luis XVI y la Asamblea Nacional francesa propusieron el sistema métrico, que empleaba unidades establecidas a partir de características observables de la naturaleza. Eventualmente, la cooperación internacional en metrología llevó a la firma del tratado de la Convención del Metro (1875), que establecía tres organizaciones internacionales para normar los estándares métricos, entre las que se encontraba la Oficina Internacional de Pesos y Medidas. En 1960, la decimoprimer Conferencia General de Pesos y Medidas creó la denominación “Sistema Internacional de Unidades”, que se abrevia SI (del nombre en francés “Système International d’Unités”). En 2019, las magnitudes fundamentales del Sistema Internacional quedaron redefinidas con base en valores exactos asignados a constantes físicas.

## Dimensiones fundamentales

MAGNITUD FÍSICA	SÍMBOLO DIMENSIONAL	UNIDAD		DEFINICIÓN
		NOMBRE	SÍMBOLO	
masa	M	kilogramo	kg	La magnitud del <b>kilogramo</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>constante de Planck</b> exactamente igual a $6.62607015 \times 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (que equivale a J·s)
longitud	L	metro	m	La magnitud del <b>metro</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>velocidad de la luz en el vacío</b> exactamente igual a $299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
tiempo	T	segundo	s	La magnitud del <b>segundo</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>frecuencia de transición hiperfina</b> en el estado fundamental del <b>cesio-133</b> (en reposo a una temperatura de 0 K) exactamente igual a $9192631770 \text{ s}^{-1}$ .
temperatura termodinámica	$\Theta$	kelvin	K	La magnitud del <b>kelvin</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>constante de Boltzmann</b> exactamente igual a $1.380649 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ (que equivale a J·K <sup>-1</sup> ).
cantidad de sustancia	N	mol	mol	La magnitud del <b>mol</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>constante de Avogadro</b> exactamente igual a $6.02214076 \times 10^{23}$ entidades elementales, expresada en mol <sup>-1</sup> . La entidad elemental referida puede ser átomo, molécula, ion, electrón o cualquier otra partícula o grupo específico de dichas partículas.
corriente eléctrica	I	ampere	A	La magnitud del <b>amperio</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>carga elemental</b> exactamente igual a $1.602176634 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$ (que equivale a C).
intensidad luminosa	J	candela	cd	La magnitud de la <b>candela</b> se establece fijando el valor numérico de la <b>eficacia luminosa</b> de una radiación monocromática con una frecuencia de $540 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ , exactamente igual a $683 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{cd} \cdot \text{sr}$ (que equivale a cd·sr·W <sup>-1</sup> , o bien lm·W <sup>-1</sup> ).

## Prefijos

MÚLTIPLOS	FACTOR	10	10 <sup>2</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>9</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>15</sup>	10 <sup>18</sup>	10 <sup>21</sup>	10 <sup>24</sup>	10 <sup>27</sup>	10 <sup>30</sup>
	PREFIJO	deca-	hecto-	kilo-	mega-	giga-	tera-	peta-	exa-	zetta-	yotta-	ronna-	quetta-
	SÍMBOLO	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y	R	Q
SUB-MÚLTIPLOS	FACTOR	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-12</sup>	10 <sup>-15</sup>	10 <sup>-18</sup>	10 <sup>-21</sup>	10 <sup>-24</sup>	10 <sup>-27</sup>	10 <sup>-30</sup>
	PREFIJO	deci-	centi-	mili-	micro-	nano-	pico-	femto-	atto-	zepto-	yocto-	ronto-	quecto-
	SÍMBOLO	d	c	m	μ	n	p	f	a	z	y	r	q

## Recomendaciones

- ✓ Los símbolos de las unidades son entidades matemáticas, no abreviaturas, por lo que no se pluralizan ni llevan punto, excepto al final de una frase.
- ✓ Los símbolos de las unidades se escriben con minúscula (m, kg, s...) excepto los que derivan de un nombre propio (N, W, Pa...), aunque el nombre de la unidad sí se escribe con minúscula (newton, watt, pascal...).
- ✓ El símbolo de la unidad común litro se suele escribir con mayúscula (L) para evitar confusión con el número 1.
- ✓ Debe dejarse un espacio entre el número y el símbolo de la unidad (10 m, 4.7 s, 25 °C, 5 mol...).
- ✓ En unidades compuestas, la multiplicación se indica con un punto intermedio · (o con un espacio, pero es menos recomendable) y la división se indica con una diagonal (N m, N·m, Pa·m<sup>3</sup>/mol·K...).
- ✓ Evitar errores comunes: k de kilo siempre es minúscula (km, kg, kJ...) y kelvin es K mayúscula sin símbolo de grados.

## Referencia principal

Oficina Internacional de Pesos y Medidas (2019). “The International System of Units”. 9ª edición.

<https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9-EN.pdf>

LA LETRA PEQUEÑA: Este documento ha sido preparado como una ayuda didáctica y trata de seguir los lineamientos (aunque no necesariamente todos) de la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM, del francés *Bureau International des Poids et Mesures*). Aunque se ha hecho un esfuerzo por asegurar su exactitud, no se da ninguna garantía (explícita o implícita) respecto a la información aquí contenida; el lector interesado debe consultar las fuentes oficiales.

# DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

(En negritas se indican las unidades fundamentales de SI)

CANTIDAD	UNIDAD SI	DIMENSIONES
Aceleración	m/s <sup>2</sup>	LT <sup>-2</sup>
Aceleración angular	rad/s <sup>2</sup>	T <sup>-2</sup>
Ángulo	rad	[-]
Ángulo sólido	sr	[-]
Área	m <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>
Campo eléctrico (E)	N/C	MLT <sup>-3</sup> I <sup>-1</sup>
Campo magnético (B)	T	MT <sup>-2</sup> I <sup>-1</sup>
Campo magnético (H)	A/m	L <sup>-1</sup> I
<b>Cantidad de sustancia</b>	<b>mol</b>	<b>N</b>
Capacidad calorífica	J/kg·K	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>
Capacidad calorífica molar	J/mol·K	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup> N <sup>-1</sup>
Capacitancia	F	M <sup>-1</sup> L <sup>-2</sup> T <sup>4</sup> I <sup>2</sup>
Carga eléctrica	C	TI
Coefficiente de temperatura	K <sup>-1</sup>	Θ <sup>-1</sup>
Coefficiente de transferencia de calor por convección	W/m <sup>2</sup> ·K	MT <sup>-3</sup> Θ <sup>-1</sup>
Concentración molal	mol/kg	M <sup>-1</sup> N
Concentración molar	mol/m <sup>3</sup>	L <sup>-3</sup> N
Conductividad eléctrica	S/m	M <sup>-1</sup> L <sup>-3</sup> T <sup>3</sup> I <sup>2</sup>
Conductividad térmica	W/m·K	MLT <sup>-3</sup> Θ <sup>-1</sup>
<b>Corriente eléctrica</b>	<b>A</b>	<b>I</b>
Densidad	kg/m <sup>3</sup>	ML <sup>-3</sup>
Densidad de flujo de calor	W/m <sup>2</sup>	MT <sup>-3</sup>
Densidad de flujo de masa	kg/m <sup>2</sup> ·s	ML <sup>-2</sup> T <sup>-1</sup>
Densidad de flujo molar	mol/m <sup>2</sup> ·s	L <sup>-2</sup> T <sup>-1</sup> N
Desplazamiento eléctrico (D)	C/m <sup>2</sup>	L <sup>-2</sup> TI
Energía, trabajo, calor	J	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
Energía específica	J/kg	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
Energía específica molar	J/mol	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> N <sup>-1</sup>
Entropía	J/K	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>
Entropía específica	J/kg·K	L <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup>
Entropía específica molar	J/mol·K	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> Θ <sup>-1</sup> N <sup>-1</sup>
Flujo magnético	T·m <sup>2</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> I <sup>-1</sup>
Flujo másico	kg/s	MT <sup>-1</sup>
Flujo molar	mol/s	T <sup>-1</sup> N
Flujo volumétrico, caudal	m <sup>3</sup> /s	L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>
Frecuencia	Hz	T <sup>-1</sup>
Frecuencia angular	rad/s	T <sup>-1</sup>
Fuerza	N	MLT <sup>-2</sup>
Gradiente de concentración (base masa)	kg/m <sup>4</sup>	ML <sup>-4</sup>

CANTIDAD	UNIDAD SI	DIMENSIONES
Gradiente de concentración (base molar)	mol/m <sup>4</sup>	L <sup>-4</sup> N
Gradiente de temperatura	K/m	L <sup>-1</sup> Θ
Gradiente de velocidad, rapidez de deformación	s <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>
Inductancia	H	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup> I <sup>-2</sup>
<b>Intensidad luminosa</b>	<b>cd</b>	<b>J</b>
<b>Longitud</b>	<b>m</b>	<b>L</b>
<b>Masa</b>	<b>kg</b>	<b>M</b>
Momento angular	kg·m <sup>2</sup> /s	ML <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>
Momento de inercia (rotacional)	kg·m <sup>2</sup>	ML <sup>2</sup>
Momento de inercia (de área)	m <sup>4</sup>	L <sup>4</sup>
Momento de torsión, torque	N·m	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
Momento dipolo	C·m	LTI
Momentum	kg·m/s	MLT <sup>-1</sup>
Número de onda	m <sup>-1</sup>	L <sup>-1</sup>
Permeabilidad magnética	T·m/A	MLT <sup>-2</sup> I <sup>-2</sup>
Permitividad eléctrica	C <sup>2</sup> /N·m <sup>2</sup>	M <sup>-1</sup> L <sup>-3</sup> T <sup>4</sup> I <sup>2</sup>
Peso específico	N/m <sup>3</sup>	ML <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>
Peso molecular (*)	g/mol	MN <sup>-1</sup>
Potencia	W	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>
Potencia específica (por unidad de volumen)	W/m <sup>3</sup>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-3</sup>
Presión, esfuerzo	Pa	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>
Resistencia eléctrica	Ω	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup> I <sup>-2</sup>
Resistencia térmica	K/W	M <sup>-1</sup> L <sup>-2</sup> T <sup>3</sup> Θ
Resistividad eléctrica	Ω·m	ML <sup>3</sup> T <sup>-3</sup> I <sup>-2</sup>
<b>Temperatura</b>	<b>K</b>	<b>Θ</b>
Tensión superficial	N/m	MT <sup>-2</sup>
<b>Tiempo</b>	<b>s</b>	<b>T</b>
Velocidad	m/s	LT <sup>-1</sup>
Velocidad angular	rad/s	T <sup>-1</sup>
Viscosidad	Pa·s	ML <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>
Viscosidad cinemática, difusividad	m <sup>2</sup> /s	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>
Voltaje, potencial eléctrico, diferencia de potencial	V	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup> I <sup>-1</sup>
Volumen	m <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>
Volumen específico	m <sup>3</sup> /kg	M <sup>-1</sup> L <sup>3</sup>
Volumen específico molar	m <sup>3</sup> /mol	L <sup>3</sup> N <sup>-1</sup>

(\*) habitualmente definido en unidades no del SI

# LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD

PARA FLUJO INCOMPRESIBLE

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}$$

Coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$

esfuerzos normales	esfuerzos tangenciales
$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}$	$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$
$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}$	$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$
$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$

esfuerzos normales	esfuerzos tangenciales
$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$
$\tau_{\theta\theta} = -2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$	$\tau_{rz} = \tau_{zr} = -\mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$
$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$

Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$

esfuerzos normales	esfuerzos tangenciales
$\tau_{rr} = -2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$
$\tau_{\theta\theta} = -2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$	$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = -\mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right)$
$\tau_{\phi\phi} = -2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)$	$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right)$

## NOTACIÓN:

$\boldsymbol{\tau}$  = tensor simétrico del esfuerzo (Pa)

$\mu$  = viscosidad (Pa·s = kg/m·s)

$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T]$  = tensor simétrico de rapidez de deformación (s<sup>-1</sup>)

$\mathbf{v}$  = vector de velocidad (m/s)

$\nabla \mathbf{v}$  = tensor del gradiente de velocidad (s<sup>-1</sup>)

$(\nabla \mathbf{v})^T$  = transpuesta del tensor del gradiente de velocidad (s<sup>-1</sup>)

# GRADIENTE DE VELOCIDAD $\nabla \mathbf{v}$

Coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \cot \theta & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \end{bmatrix}$$

## NOTACIÓN:

$\mathbf{v}$  = vector de velocidad (m/s)

$\nabla \mathbf{v}$  = tensor del gradiente de velocidad ( $s^{-1}$ )

# RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN $\dot{\gamma}$

Coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} & r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{2}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} & r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} & \frac{2}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} & \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} & \frac{2}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r + v_\theta \cot \theta \right) \end{bmatrix}$$

## NOTACIÓN:

$\dot{\gamma}$  = tensor simétrico de rapidez de deformación ( $s^{-1}$ )

$\mathbf{v}$  = vector de velocidad (m/s)

$\nabla \mathbf{v}$  = tensor del gradiente de velocidad ( $s^{-1}$ )

$(\nabla \mathbf{v})^T$  = transpuesta del tensor del gradiente de velocidad ( $s^{-1}$ )

# LEY DE FOURIER DE LA CONDUCCIÓN

PARA MATERIALES ISOTRÓPICOS

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

Coordenadas Rectangulares ( $x, y, z$ )

$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$	$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$	$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$
--	--	--

Coordenadas Cilíndricas ( $r, \theta, z$ )

$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$	$q_\theta = -k \frac{\partial T}{r \partial \theta}$	$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$
--	--	--

Coordenadas Esféricas ( $r, \theta, \phi$ )

$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$	$q_\theta = -\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	$q_\phi = -\frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$
--	--	--

## NOTACIÓN:

$\mathbf{q}$  = vector de densidad de flujo de calor (W/m<sup>2</sup>)

$k$  = conductividad térmica (W/m·K)

$T$  = temperatura (K)

$\nabla T$  = gradiente de temperatura (K/m)

# LEY DE FICK DE LA DIFUSIÓN

PARA DIFUSIÓN DE A EN B

$$\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A$$

Coordenadas rectangulares ( $x, y, z$ )

$$j_{A,x} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x}$$

$$j_{A,y} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y}$$

$$j_{A,z} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

Coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ )

$$j_{A,r} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial r}$$

$$j_{A,\theta} = -\frac{\mathcal{D}_{AB}}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

$$j_{A,z} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z}$$

Coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ )

$$j_{A,r} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial r}$$

$$j_{A,\theta} = -\frac{\mathcal{D}_{AB}}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta}$$

$$j_{A,\phi} = -\frac{\mathcal{D}_{AB}}{r \sin \theta} \frac{\partial C_A}{\partial \phi}$$

## NOTACIÓN:

$\mathbf{j}_A$  = densidad de flujo molar por difusión de A (kmol/m<sup>2</sup>·s)

$\mathcal{D}_{AB}$  = difusividad de A en B (m<sup>2</sup>/s)

$C_A$  = concentración molar de A (kmol/m<sup>3</sup>)

$\nabla C_A$  = gradiente de concentración de A (kmol/m<sup>4</sup>)

## ECUACIÓN GENERAL DE FLUJO

$$\mathbf{n}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A + \frac{C_A}{C} \sum \mathbf{n}_i$$

Coordenadas rectangulares ( $x, y, z$ )

$n_{A,x} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial x} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,x}$	$n_{A,y} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial y} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,y}$	$n_{A,z} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,z}$
--	--	--

Coordenadas cilíndricas ( $r, \theta, z$ )

$n_{A,r} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,r}$	$n_{A,\theta} = \frac{-\mathcal{D}_{AB}}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,\theta}$	$n_{A,z} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial z} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,z}$
--	---	--

Coordenadas esféricas ( $r, \theta, \phi$ )

$n_{A,r} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,r}$	$n_{A,\theta} = \frac{-\mathcal{D}_{AB}}{r} \frac{\partial C_A}{\partial \theta} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,\theta}$	$n_{A,\phi} = \frac{-\mathcal{D}_{AB}}{r \sin \theta} \frac{\partial C_A}{\partial \phi} + \frac{C_A}{C} \sum n_{i,\phi}$
--	---	---

### NOTACIÓN:

$\mathbf{n}_A$  = densidad de flujo molar total de A (kmols/m<sup>2</sup>·s)

$\mathcal{D}_{AB}$  = difusividad de A en B (m<sup>2</sup>/s)

$C_A$  = concentración molar de A (kmol/m<sup>3</sup>)

$\nabla C_A$  = gradiente de concentración de A (kmol/m<sup>4</sup>)

$C$  = concentración molar total (kmol/m<sup>3</sup>)

$\sum \mathbf{n}_i$  = suma de las densidades de flujo molar total de todos los componentes (kmol/m<sup>2</sup>·s)

(para un sistema binario  $\sum \mathbf{n}_i = \mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B$ )

# Algunos métodos de estimación para Viscosidad

μ

## ÍNDICE

VISCOSIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN .....	2
Teoría cinética de Chapman-Enskog	
Método de Stiel y Thodos	
VISCOSIDAD DE GASES PUROS A ALTA PRESIÓN .....	3
Diagrama de viscosidad reducida	
VISCOSIDAD DE MEZCLAS DE GASES A BAJA PRESIÓN .....	3
Método de Wilke	
VISCOSIDAD DE MEZCLAS DE GASES A ALTA PRESIÓN .....	3
VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS .....	3
Introducción	
Método de Przedzicki y Sridhar	
Método de Orrick y Erbar	
Método de van Velzen	
Extrapolación de Lewis-Squires	
Método de Lucas para líquidos a alta presión	
VISCOSIDAD DE MEZCLAS DE LÍQUIDOS .....	6
Reglas de mezclado	
VISCOSIDAD DE SUSPENSIONES Y EMULSIONES .....	6
Ecuación de Einstein	
Ecuación de Taylor	
FUENTES CONSULTADAS .....	6

## INTRODUCCIÓN

La viscosidad es la constante de proporcionalidad que aparece en la ley de Newton de la viscosidad, relacionando el esfuerzo  $\tau$  (o densidad de flujo de momentum) con la rapidez de deformación  $\dot{\gamma}$  (o gradiente de velocidad). En su forma más simple, la ley de Newton de la viscosidad se puede expresar como:

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Los fluidos que se comportan de acuerdo con esta ley se denominan "fluidos newtonianos", e incluyen a la mayoría de los fluidos simples. La viscosidad es una propiedad del fluido que depende de la temperatura y, en algunos casos, también depende de la presión.

La unidad SI de la viscosidad es Pa·s, que equivale a kg/m·s. Sin embargo, la viscosidad se expresa frecuentemente en submúltiplos del poise (1 P = 1 g/cm·s = 0.1 kg/m·s) tales como el centipoise (cP) para líquidos y el micropoise ( $\mu$ P) para gases.

La viscosidad cinemática es el cociente de la viscosidad entre la densidad ( $\nu = \mu / \rho$ ). Cuando la viscosidad está dada en Pa·s y la densidad en kg/m<sup>3</sup>, la viscosidad cinemática estará dada en m<sup>2</sup>/s.

La viscosidad de un gas a baja presión aumenta con la temperatura, y se considera independiente de la presión. La viscosidad de un líquido disminuye con la temperatura y es poco afectada por la presión excepto a presiones muy elevadas. Algunos valores representativos de viscosidad se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1. Algunos valores representativos de viscosidad**  
(aproximadamente a temperatura ambiente excepto donde se indica otra temperatura)

GASES ( $\mu$ P)		LÍQUIDOS (cP)	
H <sub>2</sub>	107	N <sub>2</sub> (-196 °C)	0.158
He	196	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	0.262
O <sub>2</sub>	203	acetona	0.324
N <sub>2</sub>	175	H <sub>2</sub> O (0 °C)	1.792
aire	183	H <sub>2</sub> O (20 °C)	1.005
CO	174	H <sub>2</sub> O (100 °C)	0.282
CO <sub>2</sub>	147	Hg	1.5
NH <sub>3</sub>	99	sangre (37 °C)	3 - 4
H <sub>2</sub> O (100 °C)	123	H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> (~95%)	26.7
		glicerina	1470
		miel de abeja	2000 - 10000

## NOTACIÓN

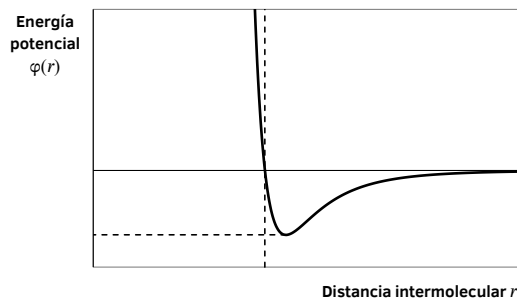
Ya que la mayoría de los métodos emplean correlaciones empíricas dimensionales, es necesario usar las unidades especificadas en esta lista salvo cuando se indica lo contrario en el método. Algunos símbolos que se emplean sólo en un método no se incluyen en esta tabla pero se definen en el método.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$M$	peso molecular	g/mol
$P$	presión	bar
$P_c$	presión crítica	bar
$P_r$	presión reducida, $P_r = P / P_c$	—
$P_{vap}$	presión de vapor	bar
$T$	temperatura	K
$T_b$	temperatura de ebullición normal (1 atm)	K
$T_c$	temperatura crítica	K
$T_m$	punto de fusión normal (1 atm)	K
$T_r$	temperatura reducida, $T_r = T / T_c$	—
$\tilde{V}_b$	volumen molar de líquido saturado en el punto de ebullición normal	cm <sup>3</sup> /mol
$\tilde{V}_c$	volumen molar en el punto crítico	cm <sup>3</sup> /mol
$\tilde{V}_m$	volumen molar de sólido en el punto de fusión	cm <sup>3</sup> /mol
$w$	fracción peso	—
$x$	fracción mol (en fase líquida)	—
$y$	fracción mol (en fase gaseosa)	—
$\epsilon$	energía característica	J
$\Phi_{ij}$	parámetro de interacción (método de Wilke)	—
$\phi$	fracción volumen	—
$\kappa$	constante de Boltzmann, $1.38066 \times 10^{-23}$ J/K	J/K
$\mu$	viscosidad	Pa·s
$\mu_c$	viscosidad en el punto crítico	Pa·s
$\mu_{ef}$	viscosidad efectiva	Pa·s
$\mu_m$	viscosidad de la mezcla	Pa·s
$\mu_r$	viscosidad reducida, $\mu_r = \mu / \mu_c$	—
$\nu$	viscosidad cinemática, $\nu = \mu / \rho$	m <sup>2</sup> /s
$\sigma$	diámetro de colisión	Å
$\omega$	factor acéntrico	—
$\Omega_\mu$	integral de colisión para viscosidad	—

**VISCOSIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN**  
**TEORÍA CINÉTICA DE CHAPMAN-ENSKOG**

La "teoría cinética de los gases" fue desarrollada de forma independiente por Sydney Chapman y David Enskog entre 1910 y 1920. A partir de esta teoría, es posible obtener predicciones para la viscosidad, la conductividad térmica y la difusividad en un gas.

El modelo de gas ideal es adecuado para describir un gas a temperaturas suficientemente altas o presiones suficientemente bajas. Una suposición de este modelo es que el gas está formado por partículas que no ejercen ninguna fuerza entre sí. Sin embargo, las moléculas en un gas real experimentan fuerzas que son de atracción o de repulsión, según la distancia entre ellas. Se han desarrollado diversos modelos para describir esta interacción, siendo uno de los más populares el potencial de Lennard-Jones  $\varphi(r)$ , que se muestra en la figura.



En el caso de la viscosidad, la teoría cinética de los gases predice la siguiente ecuación para la viscosidad de un gas a baja presión:

$$\mu = 2.6693 \times 10^{-6} \frac{(MT)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_\mu}$$

donde  $\sigma$  (diámetro de colisión) y  $\epsilon$  (energía característica, que suele reportarse dividida entre la constante de Boltzmann  $\kappa$ ) son parámetros específicos del gas (Tabla 2).

**Tabla 2. Parámetros de Lennard-Jones**

Sustancia	$\sigma$	$\epsilon/\kappa$	Sustancia	$\sigma$	$\epsilon/\kappa$
	(Å)	(K)		(Å)	(K)
H <sub>2</sub>	2.827	59.7	UF <sub>6</sub>	5.967	236.8
He	2.551	10.22	Hg	2.969	750.0
Ne	2.820	32.8	CH <sub>4</sub>	3.758	148.6
Ar	3.542	93.3	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	4.443	215.7
Kr	3.655	178.9	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	4.163	224.7
Xe	4.047	231.0	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	4.033	231.8
aire	3.711	78.6	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	5.118	237.1
N <sub>2</sub>	3.798	71.4	CH <sub>2</sub> =CH-CH <sub>3</sub>	4.678	298.9
O <sub>2</sub>	3.467	106.7	CH≡C-CH <sub>3</sub>	4.761	251.8
H <sub>2</sub> O	2.649	356	n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	4.687	531.4
CO	3.690	91.7	iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	5.278	330.1
CO <sub>2</sub>	3.941	195.2	n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	5.784	341.1
COS	4.130	336.0	C(CH <sub>3</sub> ) <sub>4</sub>	6.464	193.4
CS <sub>2</sub>	4.483	467.0	n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	5.949	399.3
C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	4.361	348.6	ciclopropano	4.807	248.9
NH <sub>3</sub>	2.900	558.3	ciclohexano	6.182	297.1
NO	3.492	116.7	benceno	5.349	412.3
N <sub>2</sub> O	3.828	232.4	CH <sub>3</sub> -OH	3.626	481.8
SO <sub>2</sub>	4.112	335.4	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	4.530	362.6
F <sub>2</sub>	3.357	112.6	CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	4.600	560.2
Cl <sub>2</sub>	4.217	316.0	CH <sub>3</sub> -O-CH <sub>3</sub>	4.307	395.0
Br <sub>2</sub>	4.296	507.9	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -O-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	5.678	313.8
I <sub>2</sub>	5.160	474.2	CH <sub>3</sub> Cl	4.182	350.0
HF	3.148	330.0	CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	4.898	356.3

Sustancia	$\sigma$	$\epsilon/\kappa$	Sustancia	$\sigma$	$\epsilon/\kappa$
	(Å)	(K)		(Å)	(K)
HCl	3.339	344.7	CHCl <sub>3</sub>	5.389	340.2
HBr	3.353	449.0	CCl <sub>4</sub>	5.947	322.7
HI	4.211	288.7	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	5.116	280.0
HCN	3.630	569.1	SiH <sub>4</sub>	4.084	207.6
H <sub>2</sub> S	3.623	301.1	SiF <sub>4</sub>	4.880	171.9
SF <sub>6</sub>	5.128	222.1			

Cuando se desconoce  $\sigma$  y  $\epsilon/\kappa$ , se pueden estimar con base en el punto crítico o el punto de ebullición o fusión normales (Tabla 3).

**Tabla 3. Estimación de diámetro de colisión y energía característica**

referencia	punto crítico (preferible)	punto crítico (alternativa)	punto de ebullición	punto de fusión
$\sigma =$	$0.841 \tilde{V}_c^{1/3}$	$2.44 \left( \frac{T_c}{P_c} \right)^{1/3}$	$1.166 \tilde{V}_b^{1/3}$	$1.222 \tilde{V}_m^{1/3}$
$\frac{\epsilon}{\kappa} =$	$0.77 T_c$	$0.77 T_c$	$1.15 T_b$	$1.92 T_m$

La integral de colisión  $\Omega_\mu$  (Tabla 4) se puede consultar tabulada en función de la temperatura adimensional  $T^*$ , definida como:

$$T^* = \frac{\kappa T}{\epsilon} \quad \text{o bien} \quad T^* = \frac{T}{\epsilon/\kappa}$$

**Tabla 4. Integral de colisión (Lennard-Jones)**

$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$	$T^*$	$\Omega_\mu$
0.25	3.0353	1.30	1.4000	2.7	1.0700	4.8	0.9326
0.30	2.8458	1.35	1.3760	2.8	1.0591	4.9	0.9288
0.35	2.6791	1.40	1.3538	2.9	1.0489	5.0	0.9252
0.40	2.5316	1.45	1.3331	3.0	1.0394	6.0	0.8948
0.45	2.4003	1.50	1.3139	3.1	1.0304	7.0	0.8719
0.50	2.2831	1.55	1.2959	3.2	1.0220	8.0	0.8535
0.55	2.1781	1.60	1.2791	3.3	1.0141	9.0	0.8382
0.60	2.0839	1.65	1.2633	3.4	1.0066	10	0.8249
0.65	1.9991	1.70	1.2486	3.5	0.9995	12	0.8026
0.70	1.9226	1.75	1.2347	3.6	0.9927	14	0.7844
0.75	1.8535	1.80	1.2216	3.7	0.9864	16	0.7690
0.80	1.7909	1.85	1.2092	3.8	0.9803	18	0.7556
0.85	1.7341	1.90	1.1975	3.9	0.9745	20	0.7439
0.90	1.6825	1.95	1.1865	4.0	0.9690	25	0.7196
0.95	1.6354	2.00	1.1760	4.1	0.9637	30	0.7003
1.00	1.5925	2.1	1.1565	4.2	0.9587	35	0.6844
1.05	1.5533	2.2	1.1388	4.3	0.9539	40	0.6710
1.10	1.5173	2.3	1.1227	4.4	0.9493	50	0.6491
1.15	1.4843	2.4	1.1079	4.5	0.9448	75	0.6111
1.20	1.4539	2.5	1.0943	4.6	0.9406	100	0.5855
1.25	1.4259	2.6	1.0817	4.7	0.9365	150	0.5512

**VISCOSIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN**  
**MÉTODO DE STIEL Y THODOS**

$$\mu = 9.91 \times 10^{-8} \frac{NM^{1/2} P_c^{2/3}}{T_c^{1/6}}$$

$N$  es aquí una función de la temperatura reducida:

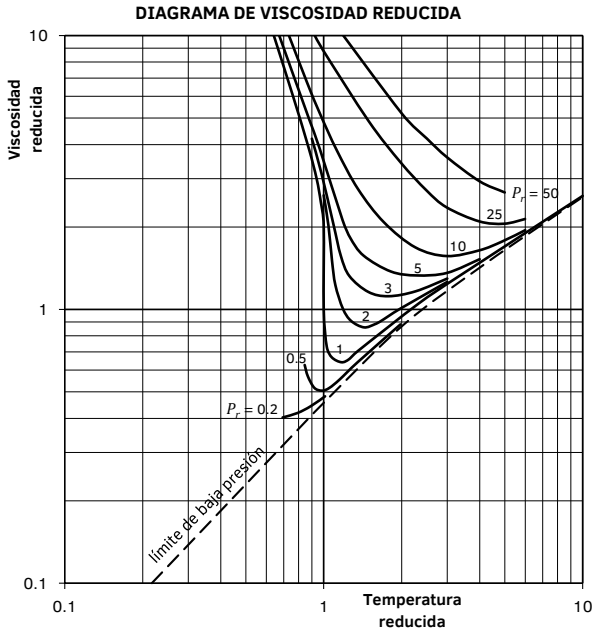
$$N = \begin{cases} 3.4 T_r^{0.94} & \text{para } T_r \leq 1.5 \\ 1.778 (4.58 T_r - 1.67)^{0.625} & \text{para } T_r > 1.5 \end{cases}$$

Este método se desarrolló originalmente para hidrocarburos puros, pero se puede emplear para otros gases no hidrocarburos excepto el hidrógeno.

### VISCOSIDAD DE GASES PUROS A ALTA PRESIÓN DIAGRAMA DE VISCOSIDAD REDUCIDA

No existe un valor específico a partir del cual se deba considerar “alta presión”. Normalmente los métodos para gases a baja presión comienzan a mostrar desviaciones significativas a presiones de 10 atm o mayores.

Con base en el principio de estados correspondientes, es posible relacionar la viscosidad reducida  $\mu_r = \mu / \mu_c$  con la temperatura y presión reducidas:



Adaptado de Bird (2002), Poling (2000) y White (1991)

Pocas veces se cuenta con datos de la viscosidad en el punto crítico; algunos valores se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Viscosidad en el punto crítico (en micropoise).

compuesto	$\mu_c$	compuesto	$\mu_c$	compuesto	$\mu_c$
H <sub>2</sub>	34.7	CS <sub>2</sub>	404	n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	239
He	25.4	NH <sub>3</sub>	250	iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	239
Ne	156	NO	258	n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	238
Ar	264	N <sub>2</sub> O	332	n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	248
Kr	396	SO <sub>2</sub>	411	ciclohexano	284
Xe	490	Cl <sub>2</sub>	420	benceno	312
Aire	193	CH <sub>4</sub>	159	CH <sub>3</sub> -OH	284
N <sub>2</sub>	180	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	210	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	285
O <sub>2</sub>	250	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	215	CH <sub>3</sub> Cl	338
H <sub>2</sub> O	450	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	237	CHCl <sub>3</sub>	410
CO	190	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	228	CCl <sub>4</sub>	413
CO <sub>2</sub>	343	CH <sub>2</sub> =CH-CH <sub>3</sub>	233		

Valores recopilados de Bird (2002), Perry (2004), Incropera (2006), y Kim (2002).

Para compuestos que no aparecen en la Tabla 5, la viscosidad crítica se puede estimar con alguna de las siguientes correlaciones:

$$\mu_c = 6.16 \times 10^{-6} \frac{(MT_c)^{1/2}}{\tilde{V}_c^{2/3}} \quad \text{o bien} \quad \mu_c = 7.7 \times 10^{-7} \frac{M^{1/2} P_c^{2/3}}{T_c^{1/6}}$$

### VISCOSIDAD DE MEZCLAS DE GASES A BAJA PRESIÓN MÉTODO DE WILKE

Este método emplea las fracciones mol y las viscosidades de los componentes puros a la misma temperatura. Para una mezcla binaria, este método se expresa como:

$$\mu_m = \frac{y_1 \mu_1}{y_1 + y_2 \Phi_{12}} + \frac{y_2 \mu_2}{y_2 + y_1 \Phi_{21}}$$

y para una mezcla de  $n$  componentes este método se generaliza a:

$$\mu_m = \sum_{i=1}^n \frac{y_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n y_j \Phi_{ij}}$$

Los  $\Phi$  son parámetros de interacción binarios que se deben calcular para cada par de compuestos  $i$  y  $j$ . La ecuación general es:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2$$

El correspondiente parámetro  $\Phi_{ji}$  (con subíndices intercambiados) se puede encontrar también con la fórmula simplificada:

$$\Phi_{ji} = \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{M_i}{M_j} \Phi_{ij}$$

Cuando ambos subíndices sean iguales,  $\Phi_{ii}$  es 1 (es decir,  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{22}$ , etcétera, son todos iguales a 1).

### VISCOSIDAD DE MEZCLAS DE GASES A ALTA PRESIÓN

Se puede recomendar el método de Lucas (Poling, 2000). Ya que este método es capaz de predecir correctamente la viscosidad de mezclas de gases a baja presión, se recomienda como método de uso general en programas de computadora.

### VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS INTRODUCCIÓN

La viscosidad de un líquido disminuye al aumentar la temperatura. Son pocos los modelos que permitan predecir la viscosidad de un líquido a partir de otra información conocida, por lo que generalmente se necesitan datos experimentales, que se suelen correlacionar el logaritmo de la viscosidad con la inversa de la temperatura. Dos ecuaciones empleadas frecuentemente son la ecuación de Andrade:

$$\ln \mu = A + \frac{B}{T}$$

o la ecuación de Vogel:

$$\ln \mu = A + \frac{B}{T + C}$$

donde los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$  deben estimarse a partir de datos experimentales.

### VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS MÉTODO DE PRZEZDZIECKI Y SRIDHAR

$$\mu = \frac{\tilde{V}_0}{E(\tilde{V} - \tilde{V}_0)}$$

En este método,  $\mu$  es la viscosidad en cP,  $\tilde{V}$  es el volumen molar de líquido en cm<sup>3</sup>/mol a la temperatura de interés, y  $E$  y  $\tilde{V}_0$  están dados por:

$$\tilde{V}_0 = \frac{\tilde{V}_m}{0.342(T_m/T_c) + 0.894} + 0.0085\omega T_c - 2.02$$

$$E = \frac{\tilde{V}_c}{12.94 + 0.10M - 0.23P_c + 0.0424T_m - 11.58(T_m/T_c)} - 1.12$$

Se recomienda que  $\tilde{V}$  (el volumen molar a la temperatura a la que se busca la viscosidad) y  $\tilde{V}_m$  (el volumen molar a la temperatura del punto de fusión  $T_m$ ) se estimen con el método de Gunn y Yamada:

$$\tilde{V} = \frac{f(T)}{f(T_{ref})} \tilde{V}_{ref} \quad \tilde{V}_m = \frac{f(T_m)}{f(T_{ref})} \tilde{V}_{ref}$$

donde  $\tilde{V}_{ref}$  es el valor experimental del volumen molar de líquido (medido a la temperatura  $T_{ref}$ ) y la función  $f(T)$  es:

$$f(T) = H_1(1 - \omega H_2)$$

con  $H_1$  y  $H_2$  funciones de la temperatura reducida  $T_r$ :

$$H_1 = 0.33593 - 0.33953T_r + 1.51941T_r^2 - 2.02512T_r^3 + 1.11422T_r^4$$

$$H_2 = 0.29607 - 0.09045T_r - 0.04842T_r^2$$

Este método puede dar errores grandes cuando la temperatura es baja ( $T_r < 0.55$ ).

#### VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS MÉTODO DE ORRICK Y ERBAR

Este método no se puede emplear para compuestos que contengan nitrógeno o azufre. El método emplea contribución de grupos para estimar dos constantes  $A$  y  $B$ . La ecuación del método es:

$$\ln \frac{\mu}{\rho M} = A + \frac{B}{T}$$

donde la viscosidad  $\mu$  está dada en cP, y la densidad  $\rho$ , en g/cm<sup>3</sup>, es del líquido a la temperatura de interés. Para líquidos que tengan un punto de ebullición por debajo de 20 °C, usar la densidad de líquido saturado a 20 °C. Para líquidos con punto de fusión por encima de 20 °C, usar la densidad de líquido en el punto de fusión.

Tabla 6. Contribuciones de grupos para el método de Orrick y Erbar

GRUPO	$\Delta A$	$\Delta B$
$\begin{array}{c} R \\   \\ R-C- \\   \\ R \end{array}$ carbono terciario	-0.15	35
$\begin{array}{c} R \\   \\ R-C-R \\   \\ R \end{array}$ carbono cuaternario	-1.20	400
doble enlace	0.24	-90
anillo de cinco miembros	0.10	32
anillo de seis miembros	-0.45	250
anillo aromático	0	20
sustitución orto	-0.12	100
sustitución meta	0.05	-34
sustitución para	-0.01	-5
-Cl	-0.61	220
-Br	-1.25	365
-I	-1.75	400
-OH	-3.00	1600
-COO-	-1.00	420
-O-	-0.38	140
$\begin{array}{c}   \\ -C=O \end{array}$	-0.50	350
-COOH	-0.90	770
otros carbonos ( $N$ = número de átomos de carbono que no estén ya incluidos en los otros grupos)	$-(6.95+0.21N)$	$275+99N$

#### VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS MÉTODO DE VAN VELZEN

Es un método de contribución de grupos bastante exacto para compuestos orgánicos, aunque no se debería emplear si la temperatura reducida es mayor que 0.75. La ecuación principal es:

$$\log_{10} \mu = B \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) - 3.0$$

La viscosidad obtenida estará en Pa·s, pero si se omite el término  $-3.0$  se obtiene la viscosidad en cP.

Los valores de  $B$  y  $T_0$  se determinan de la siguiente forma: Se comienza con el número de carbonos en la molécula  $N$ , que se emplea para calcular un número ajustado de carbonos  $N^*$ , al sumarle contribuciones correspondientes a estructura y grupos funcionales:

$$N^* = N + \sum \Delta N_k$$

Las contribuciones  $\Delta N_k$  para los principales grupos se muestran en la Tabla 7. Es importante recalcar que las contribuciones señaladas como "corrección" deben incluirse adicionalmente a las contribuciones principales.

Con el número ajustado de carbonos  $N^*$  se calcula primero una contribución base  $B_0$ , de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

si $N^* \leq 20$ :	$B_0 = 24.79 + 66.885(N^*) + 1.3173(N^*)^2 - 0.00377(N^*)^3$
si $N^* > 20$ :	$B_0 = 530.59 + 13.740(N^*)$

Luego, a esa contribución base  $B_0$  se agregan las contribuciones de los grupos (también de acuerdo con la Tabla 7) para obtener  $B$ :

$$B = B_0 + \sum \Delta B_k$$

Finalmente,  $T_0$  se calcula también con base en el número ajustado de carbonos  $N^*$ :

si $N^* \leq 20$ :	$T_0 = 28.86 + 37.439(N^*) - 1.3547(N^*)^2 - 0.02076(N^*)^3$
si $N^* > 20$ :	$T_0 = 238.59 + 8.164(N^*)$

Tabla 7. Contribuciones de grupos para el método de van Velzen

ESTRUCTURA O GRUPO FUNCIONAL	$\Delta N_k$	$\Delta B_k$	NOTAS
n-alcanos	0	0	
isoalcanos	$1.389 - 0.238N$	15.51	
hidrocarburos saturados con dos grupos metilo en posición iso-	$2.319 - 0.238N$	15.51	
n-alquenos	$-0.152 - 0.042N$	$-44.94 + 5.410N^*$	
n-alcadienos	$-0.304 - 0.084N$	$-44.94 + 5.410N^*$	
isoalquenos	$1.237 - 0.280N$	$-36.01 + 5.410N^*$	
isoalcadienos	$1.085 - 0.322N$	$-36.01 + 5.410N^*$	
hidrocarburos con un doble enlace y dos grupos metilo en posición iso-	$2.626 - 0.518N$	$-36.01 + 5.410N^*$	[A]
hidrocarburos con dos dobles enlaces y dos grupos metilo en posición iso-	$2.474 - 0.560N$	$-36.01 + 5.410N^*$	[A]
ciclopentanos	$N < 16$	$0.205 + 0.069N$	$-45.96 + 2.224N^*$ [B]
	$N \geq 16$	$3.971 - 0.172N$	$-339.67 + 23.135N^*$
ciclohexanos	$N < 17$	1.48	$-272.85 + 25.041N^*$ [C]
	$N \geq 17$	$6.517 - 0.311N$	$-272.85 + 25.041N^*$
alquil-bencenos	$N < 16$	0.60	$-140.04 + 13.869N^*$ [CDEG]
	$N \geq 16$	$3.055 - 0.161N$	$-140.04 + 13.869N^*$ [DEG]

ESTRUCTURA O GRUPO FUNCIONAL	$\Delta N_k$	$\Delta B_k$	NOTAS
compuestos halogenados			
fluoruros	1.43	5.75	
cloruros	3.21	-17.03	[DE]
bromuros	4.39	-101.97 + 5.954N*	[DE]
yoduros	5.76	-85.32	[DE]
configuraciones especiales (correcciones)			
-C(Cl) <sub>x</sub> -	1.91 - 1.459x	-26.38	
-CCl-CCl-	0.96	0	
-C(Br) <sub>x</sub> -	0.50	81.34 - 86.850x	
-CBr-CBr-	1.60	-57.73	
-CF <sub>3</sub> en alcoholes	-3.93	341.68	
-CF <sub>3</sub> en otros compuestos	-3.93	25.55	
alcoholes			
primarios	10.606 - 0.276N	-589.44 + 70.519N*	[F]
secundarios	11.200 - 0.605N	497.58	[F]
terciarios	11.200 - 0.605N	928.83	[F]
dioles (corrección)		557.77	[H]
fenoles (corrección)	16.17 - N	213.68	[GIJ]
-OH en cadena lateral de un anillo aromático (corrección)	-0.16	213.68	
polifenoles	-5.340 + 0.815N	-188.40 + 9.558N*	[G]
aldehídos	3.38	146.45 - 25.11N*	
aldehídos con un anillo aromático en su estructura (corrección)	2.70	-760.65 + 50.478N*	
ácidos	$N < 11$ $N \geq 11$	6.795 + 0.365N 10.71	-249.12 + 22.449N* -249.12 + 22.449N* [K]
ácidos con un metilo en posición iso-			-249.12 + 22.449N* [L]
ácidos con anillos aromáticos en su estructura (corrección)	4.81	-188.40 + 9.558N*	
ésteres	4.337 - 0.230N	-149.13 + 18.895N*	[D]
ésteres con anillos aromáticos en su estructura (corrección)	-1.174 + 0.376N	-140.04 + 13.895N*	
anhídridos	7.97 - 0.50N	-33.50	
anhídridos con un anillo aromático en su estructura (corrección)	2.70	-760.65 + 50.478N*	
cetonas	3.265 - 0.122N	-117.21 + 15.781N*	[D]
cetonas con anillos aromáticos en su estructura (corrección)	2.70	-760.65 + 50.478N*	
éteres	0.298 + 0.209N	-9.39 + 2.848N*	[D]
éteres aromáticos	11.5 - N	-140.04 + 13.869N*	[M]
aminas			
amina primaria	3.581 + 0.325N	25.39 + 8.744N*	[D]
amina primaria en la cadena lateral de un anillo aromático (corrección)	-0.16	0	
amina secundaria	1.390 - 0.461N	25.39 + 8.744N*	[D]
amina terciaria	3.27	25.39 + 8.744N*	[D]
amina primaria aromática (-NH <sub>2</sub> en el anillo aromático)	15.04 - N	25.39 + 8.744N*	
amina secundaria o terciaria con uno o más anillos aromáticos unidos al nitrógeno de la amina			[E]
amidas	13.12 + 1.49N	524.63 - 20.72N*	
amidas con un anillo aromático en su estructura (corrección)	2.70	-760.65 + 50.478N*	
nitrocompuestos			
1-nitro	7.812 - 0.236N	-213.14 + 18.330N*	
2-nitro	5.84	-213.14 + 18.330N*	[N]
3-nitro	5.56	-338.01 + 25.086N*	
4-nitro, 5-nitro	5.36	-338.01 + 25.086N*	
nitrocompuestos aromáticos	7.182 - 0.236N	-213.14 + 18.330N*	[E]
nitrilos	4.039 - 0.0103N	-241.66 + 27.937N*	
nitrilo con metilo en posición iso-	-0.7228 + 0.1755N	286.26 - 31.009N*	
nitrilo aromático	2.321 - 0.2357N	-26.063 - 11.516N*	

ESTRUCTURA O GRUPO FUNCIONAL	$\Delta N_k$	$\Delta B_k$	NOTAS
dinitrilo	10.452 - 1.1276N	3599.9 - 199.96N*	
sulfuros	3.9965 - 0.1861N	-76.676 + 8.143N*	
sulfuros con metilo en posición iso-	0.1601	-25.026	

#### NOTAS:

- [A] Por cada grupo -CH<sub>3</sub> adicional en posición -iso se debe aumentar  $\Delta N$  en 1.389 - 0.238N.
- [B] No recomendado para  $N = 5$  ó  $N = 6$ .
- [C] No recomendado para  $N = 6$  ó  $N = 7$ .
- [D] Para ésteres, alquilbencenos, hidrocarburos halogenados y cetonas: si la cadena de hidrocarburo tiene un grupo metilo en posición iso-, hay que disminuir  $\Delta N$  en 0.24 y aumentar  $\Delta B$  en 8.93, por cada uno de dichos grupos. Para éteres y aminas, disminuir  $\Delta N$  en 0.50 y aumentar  $\Delta B$  en 8.93, por cada uno de los grupos iso-.
- [E] Para alquilbencenos, nitrobencenos, bencenos halogenados, y aminas secundarias y terciarias, en los que al menos un grupo aromático está unido al nitrógeno de un grupo amino, hay que agregar las siguientes correcciones: Si  $N < 16$ , aumentar  $\Delta N$  en 0.60; si  $N \geq 16$ , aumentar  $\Delta N$  en 3.055 - 0.161N por cada grupo aromático; y para cualquiera que sea el valor de  $N$ , aumentar  $\Delta B$  en (-140.04 + 13.869N\*).
- [F] Para alcoholes, si existe un grupo metil en posición iso-, incrementar  $\Delta N$  en 0.24 y  $\Delta B$  en 94.23.
- [G] Cuando existe sustitución en más de una posición de un anillo aromático, se requieren las siguientes correcciones adicionales:
  - orientación orto- sin grupo -OH:  $\Delta N = 0.51$  y  $\Delta B = 54.84$ .
  - orientación orto- con grupo -OH:  $\Delta N = 0.51$  y  $\Delta B = -571.94$ .
  - orientación meta-:  $\Delta N = 0.11$  y  $\Delta B = 27.25$ .
  - orientación para-:  $\Delta N = 0.04$  y  $\Delta B = 17.57$ .
- [H] Para  $\Delta N$ , úsense las contribuciones del alcohol y añádase  $N - 2.50$ .
- [I] Si el compuesto tiene un -OH o un -NH<sub>2</sub> aromático, o si hay un éter aromático, emplear la contribución  $\Delta N$  que hay en la tabla, pero despreciar otros sustituyentes del anillo, tales como halógenos, -CH<sub>3</sub>, -NO<sub>2</sub> y similares. Sin embargo, sí hay que tomar en cuenta estos sustituyentes para el cálculo de  $\Delta B$ .
- [J] Para alcoholes aromáticos y compuestos con un -OH en una cadena lateral, se debe incluir la contribución del alcohol (primario, secundario, etcétera).
- [K] No recomendado para  $N = 1$  ó  $N = 2$ .
- [L] Calcular  $\Delta N$  como si fuera un ácido de cadena lineal y reducir  $\Delta N$  en 0.24 por cada grupo metilo en posición iso-. Respecto a  $\Delta B$ , calcular como si fuera un ácido de cadena lineal (no hay corrección adicional).
- [M] El valor de  $\Delta N$  no es una corrección al valor regular del éter, pero el de  $\Delta B$  sí es una corrección al valor regular del éter.
- [N] Nótese que la contribución del alqueno es necesaria.

#### VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS EXTRAPOLACIÓN DE LEWIS-SQUIRES

Si sólo se conoce un dato experimental de viscosidad de un líquido a cierta temperatura, es posible obtener una estimación de la viscosidad a otra temperatura usando la ecuación de Lewis-Squires, aunque los errores pueden variar entre 5 a 15% o incluso mayores:

$$\mu^{-0.2661} = \mu_{(1)}^{-0.2661} + \frac{T - T_{(1)}}{37.073}$$

donde las viscosidades están en Pa·s y las temperaturas pueden estar en °C o K, ya que sólo se usa su diferencia, y  $\mu_{(1)}$  es el valor conocido de la viscosidad a la temperatura conocida  $T_{(1)}$ . Este método no debe emplearse para temperaturas muy por encima del punto de ebullición normal.

## VISCOSIDAD DE LÍQUIDOS PUROS

### MÉTODO DE LUCAS PARA LÍQUIDOS A ALTA PRESIÓN

Para presiones relativamente bajas, la presión prácticamente no afecta la viscosidad de un líquido. A presiones moderadas o altas, la viscosidad de líquido aumenta con la presión. En este caso se puede usar la ecuación de Lucas:

$$\frac{\mu}{\mu_{\text{sat}}} = \frac{1 + D(0.47214\Delta P_r)^A}{1 + C\omega\Delta P_r}$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del líquido a alta presión y  $\mu_{\text{sat}}$  es la viscosidad del líquido saturado a la misma temperatura.  $\Delta P_r$  es la diferencia reducida entre la presión y la presión de vapor:

$$\Delta P_r = \frac{P - P_{\text{vap}}}{P_c}$$

y los parámetros  $A$ ,  $C$  y  $D$  son funciones de la temperatura reducida:

$$A = 0.9991 - \frac{4.674 \times 10^{-4}}{1.0523T_r^{-0.03877} - 1.0513}$$

$$C = -0.07921 + 2.1616T_r - 13.4040T_r^2 + 44.1706T_r^3 - 84.8291T_r^4 + 96.1209T_r^5 - 59.8127T_r^6 + 15.6719T_r^7$$

$$D = \frac{0.3257}{(1.0039 - T_r^{2.573})^{0.2906}} - 0.2086$$

## VISCOSIDAD DE MEZCLAS DE LÍQUIDOS

### REGLAS DE MEZCLADO

Para una mezcla líquida de  $n$  hidrocarburos se puede emplear la regla de mezclado propuesta por Kendall y Monroe:

$$\mu_m^{1/3} = \sum_{k=1}^n x_k \mu_k^{1/3}$$

Si la mezcla incluye compuestos no hidrocarburos, entonces se recomienda la siguiente regla de mezclado:

$$\ln \mu_m = \sum_{k=1}^n x_k \ln \mu_k$$

En estas dos ecuaciones, las unidades de  $\mu_m$  serán las mismas que las de  $\mu_i$ .

## VISCOSIDAD DE SUSPENSIONES Y EMULSIONES

### ECUACIÓN DE EINSTEIN

Para el caso de suspensiones de partículas sólidas en líquidos, es posible en la mayoría de los casos tratar este sistema de dos fases como si fuera una sola fase homogénea que tiene una viscosidad efectiva  $\mu_{\text{ef}}$ . El primer modelo que se desarrolló fue la ecuación de Einstein, que aplica para suspensiones diluidas de esferas:

$$\frac{\mu_{\text{ef}}}{\mu_0} = 1 + \frac{5}{2} \phi$$

donde  $\mu_0$  es la viscosidad del líquido puro. Para suspensiones diluidas de partículas de forma diferente a la esférica, la constante 5/2 se cambia por un coeficiente ajustable cuyo valor dependerá de la forma de las partículas.

Para suspensiones concentradas de esferas ( $\phi > 0.05$ ), puede emplearse la ecuación de Mooney:

$$\frac{\mu_{\text{ef}}}{\mu_0} = \exp\left(\frac{\frac{5}{2}\phi}{1 - (\phi/\phi_0)}\right)$$

donde  $\phi_0$  es una constante empírica, generalmente entre 0.52 y 0.74.

## VISCOSIDAD DE SUSPENSIONES Y EMULSIONES

### ECUACIÓN DE TAYLOR

Para emulsiones o suspensiones de pequeñas gotas de un líquido en otro, la viscosidad efectiva suele ser mucho menor que en el caso de suspensiones de partículas sólidas. En este caso puede emplearse la ecuación de Taylor:

$$\frac{\mu_{\text{ef}}}{\mu_0} = 1 + \left(\frac{\mu_0 + \frac{5}{2}\mu_1}{\mu_0 + \mu_1}\right)\phi$$

En la que  $\mu_0$  es la viscosidad de la fase continua y  $\mu_1$  es la viscosidad de la fase dispersa.

## FUENTES CONSULTADAS

- Bird, Stewart y Lightfoot (2002). "Transport Phenomena". 2ª edición, Wiley.
- Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª edición, McGraw-Hill.
- Poling, Prausnitz y O'Connell (2000). "The Properties of Gases and Liquids". 5ª edición, McGraw-Hill
- Reid, Prausnitz y Poling (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª edición, McGraw-Hill.
- Welty, Wicks y Wilson (1997). "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa", Limusa.

## LA LETRA PEQUEÑA

EL ÚNICO PROPÓSITO DE ESTE DOCUMENTO ES SERVIR COMO RECURSO DIDÁCTICO; SU USO DEBE SER EXCLUSIVAMENTE ACADÉMICO. PARTES DE ESTE DOCUMENTO PUEDEN ESTAR SUJETAS A RESTRICCIONES POR DERECHOS DE AUTOR EN ALGUNOS PAÍSES.

ALGUNOS DE LOS MÉTODOS HAN SIDO ADAPTADOS PARA EMPLEAR CONSISTENTEMENTE SIMBOLOGÍA Y/O SISTEMA DE UNIDADES, PARA FACILITAR LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS, O PARA CONCILIAR EN LO POSIBLE DISCREPANCIAS ENTRE LAS DIVERSAS FUENTES CONSULTADAS.

NO SE DA NINGUNA GARANTÍA, EXPLÍCITA O IMPLÍCITA, SOBRE LA EXACTITUD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO, POR LO QUE NO SE RECOMIENDA SU USO EN LA PREPARACIÓN DE DISEÑOS FINALES DE EQUIPOS INDUSTRIALES, PROCESOS QUÍMICOS, O SISTEMAS DE VIAJE A TRAVÉS DEL TIEMPO.

## CONTENIDO

CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN.....	2
Teoría cinética de Chapman-Enskog	
Definición del factor de Eucken	
Ecuación de Eucken modificada por Stiel y Thodos	
Método de Chung	
CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A ALTA PRESIÓN .....	2
Diagrama de conductividad reducida	
Método de Stiel y Thodos	
CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE GASES A BAJA PRESIÓN .....	3
Método de Wilke	
CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE GASES A ALTA PRESIÓN.....	3
Método de Stiel y Thodos	
CONDUCTIVIDAD DE LÍQUIDOS PUROS.....	3
Método del punto de ebullición de Sato y Riedel	
Método de Latini	
CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE LÍQUIDOS .....	4
Ecuación de Filipov	
Método de Li	
CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE SÓLIDOS.....	4
Ecuación de Wiedemann-Franz-Lorentz	
Ecuación de Maxwell para sólidos compuestos	
Productos alimenticios	
FUENTES CONSULTADAS.....	5

## INTRODUCCIÓN

La conductividad térmica  $k$  es la constante de proporcionalidad que aparece en la ley de Fourier de la conducción, relacionando la densidad de flujo de calor con el gradiente de temperatura:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

En el SI, la conductividad térmica está dada en W/m·K. Algunos valores representativos de conductividad se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1. Valores representativos de conductividad térmica**  
(en W/m·K, aproximadamente a temperatura ambiente)

GASES		LÍQUIDOS	
Cl <sub>2</sub>	0.0089	gasolina	0.116
CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub> (R-12)	0.0097	ciclohexano	0.120
n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	0.0160	éter etílico	0.134
CO <sub>2</sub>	0.0166	aceite mineral	0.138
Ar	0.0177	CS <sub>2</sub>	0.166
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	0.0183	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	0.173
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0.0214	CH <sub>3</sub> -OH	0.203
H <sub>2</sub> O (vapor)	0.0247	gas LP	0.23 ~ 0.26
aire	0.0250	etilénglicol	0.255
CH <sub>4</sub>	0.0343	glicerina	0.29
He	0.150	H <sub>2</sub> O	0.6
H <sub>2</sub>	0.182	Hg	8.3
SÓLIDOS			
aerogel sílice	0.004 ~ 0.040	acero inoxidable	16.3 ~ 24
fibra de vidrio	0.038	titanio	26
nieve	0.05 ~ 0.20	plomo	35
madera	0.06 ~ 0.19	acero al carbono	43
hule	0.16	bronce (90% Cu)	47
acrílico	0.17 ~ 0.20	platino	72
polipropileno	0.25	hierro dulce	80
polietileno (HDPE)	0.33 ~ 0.52	tungsteno	180
teflón	0.35	aluminio	273
vidrio	1.1	oro	318
cuarzo fundido	1.4	cobre	401
suelo	1.5	plata	424
concreto/piedra	1.7	grafito <sup>(1)</sup>	10
hielo	2.0	grafito <sup>(2)</sup>	2000
NaCl	7.1	diamante	2300

<sup>(1)</sup> perpendicular al plano basal    <sup>(2)</sup> paralelo al plano basal

## NOTACIÓN

La mayoría de los métodos usan correlaciones empíricas, por lo que se debe emplear las unidades especificadas en esta lista excepto cuando el método indique otras unidades. Algunos símbolos usados sólo en un método no se incluyen aquí pero se definen en el método.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$c_p$	capacidad calorífica a presión constante	J/mol·K
$c_v$	capacidad calorífica a volumen constante $c_v = c_p - R$ (para gases ideales)	J/mol·K
$f$	factor de Eucken $f \equiv kM^* / \mu c_v$	-
$k$	conductividad térmica	W/m·K
$k_c$	conductividad térmica en el punto crítico	W/m·K
$k_r$	conductividad térmica reducida $k_r = k / k_c$	-
$L$	número de Lorentz	W·Ω/K <sup>2</sup>
$M$	peso molecular	g/mol
$M^*$	peso molecular (en unidades SI)	kg/mol
$P$	presión	bar
$P_c$	presión crítica	bar
$P_r$	presión reducida $P_r = P / P_c$	-
$R$	constante universal de los gases $R = 8.314$ J/mol·K	J/mol·K
$T$	temperatura	K
$T_b$	temperatura de ebullición normal (1 atm)	K
$T_{br}$	temperatura de ebullición reducida $T_{br} = T_b / T_c$	-
$T_c$	temperatura crítica	K
$T_r$	temperatura reducida $T_r = T / T_c$	-
$\tilde{V}_b$	volumen molar de líquido saturado en el punto de ebullición normal	cm <sup>3</sup> /mol
$\tilde{V}_c$	volumen molar en el punto crítico	cm <sup>3</sup> /mol
$\tilde{V}_m$	volumen molar de sólido en el punto de fusión	cm <sup>3</sup> /mol
$w$	fracción peso	-
$x$	fracción mol (en fase líquida)	-
$y$	fracción mol (en fase gaseosa)	-
$Z_c$	compresibilidad en el punto crítico	-
$\Gamma$	conductividad térmica inversa	m·K/W
$\epsilon$	energía característica	J
$\phi$	fracción volumen	-
$\kappa$	constante de Boltzmann $\kappa = 1.38066 \times 10^{-23}$ J/K	J/K
$\mu$	viscosidad	Pa·s
$\mu$	momento dipolo	debye
$\rho_r$	densidad reducida $\rho_r = \rho / \rho_c$	-
$\sigma$	diámetro de colisión	Å
$\Omega_k$	integral de colisión para conductividad	-
$\omega$	factor acéntrico	-

**CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN**  
TEORÍA CINÉTICA DE CHAPMAN-ENSKOG

La teoría cinética de Chapman-Enskog da buenas predicciones para viscosidad y difusividad, pero no es confiable para conductividad térmica de gases poliatómicos, ya que sólo considera la energía cinética traslacional de la molécula, pero no incluye las contribuciones energéticas debidas a vibraciones y rotaciones. Por esta razón, este método sólo se puede recomendar para gases monoatómicos.

$$k = 0.08328 \frac{(T/M)^{0.5}}{\sigma^2 \Omega_k}$$

Esta ecuación fue desarrollada tomando como base el potencial de Lennard-Jones  $\varphi(r)$  para la interacción entre los átomos del gas:

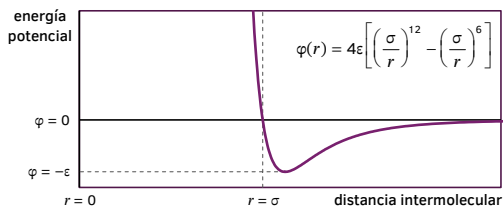


Figura 1. Potencial de Lennard-Jones.

El diámetro de colisión  $\sigma$  y la energía característica  $\epsilon$  (generalmente se tiene dividida entre la constante de Boltzmann  $\kappa$ ) son parámetros específicos del gas (Tabla 2).

Tabla 2. Parámetros de Lennard-Jones para gases monoatómicos

sustancia	$\sigma$	$\epsilon / \kappa$	sustancia	$\sigma$	$\epsilon / \kappa$
	(Å)	(K)		(Å)	(K)
He	2.551	10.22	Kr	3.655	178.9
Ne	2.820	32.8	Xe	4.047	231.0
Ar	3.542	93.3	Hg	2.969	750.0

La integral de colisión  $\Omega_k$  (Tabla 3) se puede consultar tabulada en función de la temperatura adimensional  $T^*$ , definida como:

$$T^* = \frac{T}{\epsilon / \kappa}$$

Tabla 3. Integral de colisión (Lennard-Jones)

$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$	$T^*$	$\Omega_k$
0.25	3.0353	1.30	1.4000	2.7	1.0700	4.8	0.9326
0.30	2.8458	1.35	1.3760	2.8	1.0591	4.9	0.9288
0.35	2.6791	1.40	1.3538	2.9	1.0489	5.0	0.9252
0.40	2.5316	1.45	1.3331	3.0	1.0394	6.0	0.8948
0.45	2.4003	1.50	1.3139	3.1	1.0304	7.0	0.8719
0.50	2.2831	1.55	1.2959	3.2	1.0220	8.0	0.8535
0.55	2.1781	1.60	1.2791	3.3	1.0141	9.0	0.8382
0.60	2.0839	1.65	1.2633	3.4	1.0066	10	0.8249
0.65	1.9991	1.70	1.2486	3.5	0.9995	12	0.8026
0.70	1.9226	1.75	1.2347	3.6	0.9927	14	0.7844
0.75	1.8535	1.80	1.2216	3.7	0.9864	16	0.7690
0.80	1.7909	1.85	1.2092	3.8	0.9803	18	0.7556
0.85	1.7341	1.90	1.1975	3.9	0.9745	20	0.7439
0.90	1.6825	1.95	1.1865	4.0	0.9690	25	0.7196
0.95	1.6354	2.00	1.1760	4.1	0.9637	30	0.7003
1.00	1.5925	2.1	1.1565	4.2	0.9587	35	0.6844
1.05	1.5533	2.2	1.1388	4.3	0.9539	40	0.6710
1.10	1.5173	2.3	1.1227	4.4	0.9493	50	0.6491
1.15	1.4843	2.4	1.1079	4.5	0.9448	75	0.6111
1.20	1.4539	2.5	1.0943	4.6	0.9406	100	0.5855
1.25	1.4259	2.6	1.0817	4.7	0.9365	150	0.5512

Valores calculados con las correlaciones de Neufeld citadas en Poling et al., 2000.

**CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN**  
DEFINICIÓN DEL FACTOR DE EUCKEN

La conductividad térmica ha sido obtenida frecuentemente a partir de un grupo adimensional, llamado **factor de Eucken**, definido como:

$$f \equiv \frac{kM^*}{\mu c_V}$$

Para un gas monoatómico ideal, la teoría cinética de los gases predice el valor  $f = 2.5$ .

Para gases poliatómicos se han desarrollado varias correlaciones para estimar el valor de  $f$ , como las que se describen a continuación.

**CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN**  
ECUACIÓN DE EUCKEN MODIFICADA POR STIEL Y THODOS

La ecuación originalmente propuesta por Eucken para estimar  $f$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$f = 1 + \frac{2.25R}{c_V}$$

Sin embargo, Stiel y Thodos propusieron modificar ligeramente los valores de los coeficientes para que concuerde un poco mejor con los datos experimentales:

$$f = 1.15 + \frac{2.03R}{c_V}$$

En general, esta ecuación no es confiable para compuestos polares.

**CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A BAJA PRESIÓN**  
MÉTODO DE CHUNG

Este método es razonablemente preciso para compuestos no polares y polares. El factor de Eucken se calcula a partir del valor de  $\Psi$ :

$$f = \frac{3.75R\Psi}{c_V}$$

donde  $\Psi$  es función de tres parámetros adimensionales,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\zeta$ :

$$\Psi = 1 + \frac{\alpha(0.215 + 0.28288\alpha - 1.061\beta + 0.26665\zeta)}{0.6366 + \beta\zeta + 1.061\alpha\beta}$$

$$\alpha = \frac{c_V}{R} - 1.5$$

$$\zeta = 2 + 10.5T_r^2$$

Para sustancias no polares o ligeramente polares ( $\mu < 0.8 D$ ) se usa:

$$\beta = 0.7862 - 0.7109\omega + 1.3168\omega^2$$

y para sustancias polares ( $\mu \geq 0.8 D$ ) se recomienda usar  $\beta = 0.7576$ .

**CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A ALTA PRESIÓN**  
INTRODUCCIÓN

No existe un valor específico de presión a partir del cual se considere "alta". Los métodos para gases a baja presión suelen mostrar desviaciones significativas a presiones de 10 atm o mayores.

**CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A ALTA PRESIÓN**  
DIAGRAMA DE CONDUCTIVIDAD REDUCIDA

Con base en el principio de estados correspondientes, es posible relacionar la conductividad térmica reducida  $k_r$  con la temperatura reducida  $T_r$  y la presión reducida  $P_r$  (Figura 2).

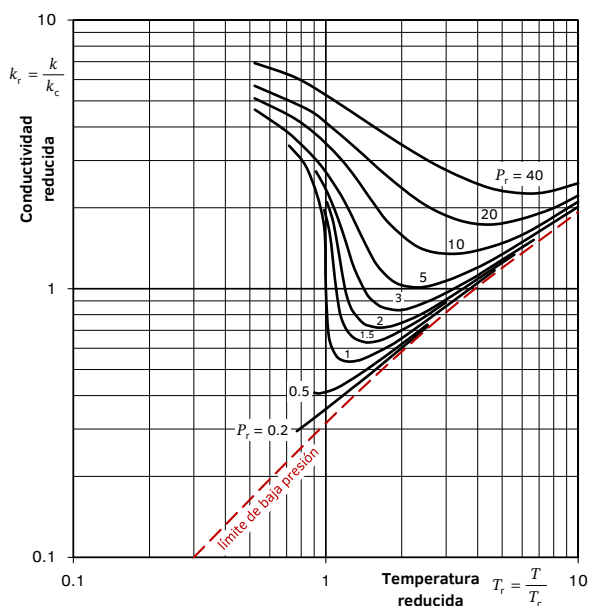


Figura 2. Diagrama de conductividad reducida.

Pocas veces se cuenta con valores experimentales de la conductividad térmica en el punto crítico; algunos se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. Conductividad térmica en el punto crítico (W/m·K).

compuesto	$k_c$	compuesto	$k_c$	compuesto	$k_c$
Ne	0.0332	N <sub>2</sub>	0.0363	NO	0.0495
Ar	0.0297	O <sub>2</sub>	0.0441	N <sub>2</sub> O	0.0548
Kr	0.0207	H <sub>2</sub> O	0.2380	SO <sub>2</sub>	0.0413
Xe	0.0168	CO	0.0362	Cl <sub>2</sub>	0.0406
aire	0.0380	CO <sub>2</sub>	0.0511	CH <sub>4</sub>	0.0662
				C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	0.0850

Valores recopilados de Bird (2002) e Incropera (2006).

Para compuestos no incluidos en la Tabla 4, si se conoce un dato de conductividad a otra temperatura y presión, entonces la conductividad crítica se puede estimar a partir de  $k_c = k / k_r$ , donde  $k_r$  se obtiene de la gráfica empleando los valores de  $T_r$  y  $P_r$  correspondientes a las condiciones a las cuales se conoce la conductividad.

#### CONDUCTIVIDAD DE GASES PUROS A ALTA PRESIÓN

##### MÉTODO DE STIEL Y THODOS

Este método no es muy preciso (error típico de  $\pm 10$  a 20%), y no se debe emplear para hidrógeno, helio o para sustancias polares. Correlaciona la conductividad térmica en exceso ( $k - k^\circ$ ) con la densidad reducida  $\rho_r$  y la compresibilidad en el punto crítico  $Z_c$  según el intervalo de valores de la densidad reducida.

$\rho_r < 0.5$	$(k - k^\circ)\Gamma Z_c^5 = 1.22 \times 10^{-2} (e^{0.535\rho_r} - 1)$
$0.5 < \rho_r < 2.0$	$(k - k^\circ)\Gamma Z_c^5 = 1.14 \times 10^{-2} (e^{0.67\rho_r} - 1.069)$
$2.0 < \rho_r < 2.8$	$(k - k^\circ)\Gamma Z_c^5 = 2.6 \times 10^{-3} (e^{1.155\rho_r} + 2.016)$

donde  $k^\circ$  es la conductividad térmica del gas a baja presión (a la misma temperatura) y  $\Gamma$  es un parámetro llamado conductividad térmica inversa:

$$\Gamma = 210 \left( \frac{T_c M^3}{P_c^4} \right)^{1/6}$$

#### CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE GASES A BAJA PRESIÓN

##### MÉTODO DE WILKE

Este método emplea las fracciones mol y las conductividades de los componentes puros a la misma temperatura. Para una mezcla binaria (sustancias 1 y 2), este método se expresa como:

$$k_m = \frac{y_1 k_1}{y_1 + y_2 \Phi_{12}} + \frac{y_2 k_2}{y_2 + y_1 \Phi_{21}}$$

y para una mezcla de  $n$  componentes, se generaliza a:

$$k_m = \frac{\sum_{i=1}^n y_i k_i}{\sum_{j=1}^n y_j \Phi_{ij}}$$

Los valores  $\Phi_{ij}$  son parámetros de interacción que dependen de las viscosidades de los componentes puros a baja presión:

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2$$

y el correspondiente parámetro de subíndices intercambiados  $\Phi_{ji}$  se puede encontrar con la fórmula simplificada:

$$\Phi_{ji} = \left( \frac{\mu_j}{\mu_i} \right) \left( \frac{M_i}{M_j} \right) \Phi_{ij}$$

Obsérvese que cuando ambos subíndices  $i$  y  $j$  son iguales,  $\Phi = 1$ .

#### CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE GASES A ALTA PRESIÓN

##### MÉTODO DE STIEL Y THODOS

Emplea las mismas ecuaciones que el método de Stiel y Thodos para gases puros a alta presión mostrado previamente, pero empleando las propiedades pseudocríticas de la mezcla, definidas a continuación:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{c,ij} &= \frac{1}{8} \left[ (\tilde{V}_{c,i})^{1/3} + (\tilde{V}_{c,j})^{1/3} \right]^3 & \tilde{V}_{c,m} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_i y_j \tilde{V}_{c,ij} \\ T_{c,ij} &= (T_{c,i} T_{c,j})^{1/2} & T_{c,m} &= \frac{1}{\tilde{V}_{c,m}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n y_i y_j \tilde{V}_{c,ij} T_{c,ij} \\ M_m &= \sum_{i=1}^n y_i M_i & \omega_m &= \sum_{i=1}^n y_i \omega_i \\ Z_{c,m} &= 0.291 - 0.08 \omega_m \end{aligned}$$

Nótese que  $T_{c,ii} = T_{c,i}$  y  $\tilde{V}_{c,ii} = \tilde{V}_{c,i}$ .

#### CONDUCTIVIDAD DE LÍQUIDOS PUROS

##### INTRODUCCIÓN

Son pocos los modelos que permitan predecir de forma confiable la conductividad de un líquido a partir de otra información conocida, por lo que frecuentemente se emplean datos experimentales.

#### CONDUCTIVIDAD DE LÍQUIDOS PUROS

##### MÉTODO DEL PUNTO DE EBULLICIÓN DE SATO Y RIEDEL

$$k = \frac{1.11}{M^{1/2}} \left[ \frac{3 + 20(1 - T_r)^{2/3}}{3 + 20(1 - T_{br})^{2/3}} \right]$$

Para líquidos orgánicos a temperaturas por debajo del punto de ebullición, esta correlación da errores variables, aunque generalmente están por debajo del 15%. Este método es de exactitud limitada, pero tiene la ventaja de que sólo requiere información básica del compuesto.

**CONDUCTIVIDAD DE LÍQUIDOS PUROS  
MÉTODO DE LATINI**

$$k = A \frac{(1 - T_r)^{0.38}}{T_r^{1/6}} \quad \text{donde } A = \frac{A^* T_b^\alpha}{M^\beta T_c^\gamma}$$

Las constantes  $A^*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dependen del tipo de compuesto, de acuerdo a la Tabla 5.

**Tabla 5. Constantes para el método de Latini**

FAMILIA	$A^*$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
hidrocarburos saturados	0.0035	1.2	0.5	0.167
olefinas	0.0361	1.2	1.0	0.167
cicloparafinas	0.0310	1.2	1.0	0.167
aromáticos	0.0346	1.2	1.0	0.167
alcoholes	0.00339	1.2	0.5	0.167
ácidos orgánicos	0.00319	1.2	0.5	0.167
cetonas	0.00383	1.2	0.5	0.167
ésteres	0.0415	1.2	1.0	0.167
éteres	0.0385	1.2	1.0	0.167
refrigerantes R20, R21, R22, R23	0.562	0.0	0.5	-0.167
otros refrigerantes	0.494	0.0	0.5	-0.167

Este método no es aplicable para otros tipos de compuestos no incluidos en la tabla y se presentan dificultades cuando un compuesto pertenece a más de una categoría. Los errores típicos suelen ser menores al 10%, pero se puede tener errores mayores si el peso molecular está fuera del intervalo de 50 a 250 g/mol.

**CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE LÍQUIDOS  
ECUACIÓN DE FILIPPOV**

Esta ecuación sólo aplica para mezclas binarias y emplea la conductividad térmica de los líquidos puros y las fracciones peso:

$$k_m = w_1 k_1 + w_2 k_2 - 0.72 w_1 w_2 (k_2 - k_1)$$

Los componentes se asignan de tal forma que el componente 1 sea el de menor conductividad y el componente 2 sea el de mayor conductividad (es decir, se debe cumplir  $k_2 \geq k_1$ ).

Cuando se dispone de datos experimentales, la constante 0.72 se puede reemplazar por un parámetro ajustable por regresión para que la ecuación dé mejores predicciones.

**CONDUCTIVIDAD DE MEZCLAS DE LÍQUIDOS  
MÉTODO DE LI**

Para un sistema binario:

$$k_m = \alpha_1^2 k_1 + 2\alpha_1 \alpha_2 k_{12} + \alpha_2^2 k_2$$

y para un sistema de  $n$  componentes:

$$k_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j k_{ij}$$

donde  $k_{ij}$  es la media armónica de las conductividades térmicas de los componentes puros, tomados de par en par:

$$k_{ij} = 2(k_i^{-1} + k_j^{-1})^{-1} \quad k_{ii} = k_i$$

Las  $\alpha$  son parámetros de interacción dados por:

$$\alpha_i = \frac{x_i \tilde{V}_i}{\sum_{j=1}^n x_j \tilde{V}_j}$$

$\tilde{V}$  es el volumen molar ( $\text{cm}^3/\text{mol}$ ) del líquido puro a la temperatura de interés. Si no se dispone a esa temperatura, puede usarse el volumen molar en el punto de ebullición ( $\tilde{V}_b$ ). Si la mezcla no incluye agua, también se puede emplear el volumen molar crítico  $\tilde{V}_c$  ( $\text{cm}^3/\text{mol}$ ) en vez de  $\tilde{V}$  sin afectar el resultado significativamente.

**CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE SÓLIDOS  
INTRODUCCIÓN**

En términos generales, la conductividad térmica de los metales disminuye con la temperatura; la de no metales aumenta con la temperatura; y las aleaciones muestran comportamientos intermedios. De los metales, la plata es el mejor conductor del calor.

Los sólidos cristalinos son generalmente mejores conductores del calor que los sólidos amorfos. El diamante es uno de los mejores conductores de calor.

**CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE SÓLIDOS  
ECUACIÓN DE WIEDEMANN-FRANZ-LORENTZ (METALES PUROS)**

Para metales y aleaciones, la conductividad térmica está relacionada estrechamente con la conductividad eléctrica, ya que la alta movilidad de los electrones de la banda de conducción hace que sean los principales agentes de transporte de energía térmica.

La ecuación de Wiedemann-Franz-Lorentz relaciona ambas conductividades y la temperatura, en forma de un grupo dimensional denominado número de Lorentz:

$$L \equiv \frac{k}{k_e T}$$

donde  $k_e$  es la conductividad eléctrica en siemens por metro (S/m, donde el siemen es el inverso del ohm,  $S \equiv \Omega^{-1}$ ).

El número de Lorentz  $L$  está entre 2.2 y  $2.9 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\Omega/\text{K}^2$  para la mayoría de los metales puros a 0 °C y varía poco con la temperatura (típicamente 1 a 2% por cada 100 °C), por lo que generalmente se le considera constante.

Esta ecuación es de limitada utilidad para aleaciones, ya que el número de Lorentz  $L$  depende fuertemente de la composición de la aleación y en ocasiones también depende de la temperatura.

**CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE SÓLIDOS  
ECUACIÓN DE MAXWELL PARA SÓLIDOS COMPUESTOS**

En el caso de un sólido compuesto (compósito), se puede considerar que el material tiene una conductividad térmica efectiva  $k_{ef}$  que depende de las conductividades de los componentes. Maxwell fue el primero en analizar la conducción de calor en medios compuestos, cuando consideró un material formado por esferas de conductividad  $k_1$  dispersas en una fase sólida continua de conductividad  $k_0$ . Si la fracción volumen  $\phi$  de la fase dispersa no es demasiado grande:

$$\frac{k_{ef}}{k_0} = 1 + \frac{3\phi}{\left(\frac{k_1 + 2k_0}{k_1 - k_0}\right) - \phi}$$

**CONDUCTIVIDAD TÉRMICA DE SÓLIDOS  
PRODUCTOS ALIMENTICIOS**

Muchos productos alimenticios son anisotrópicos, por lo que la conductividad térmica varía dependiendo de la dirección en la que se transfiere el calor. Se han propuesto varios modelos para estimar la conductividad térmica de un alimento a partir de la conductividad térmica y la fracción volumen de los componentes individuales (carbohidratos, grasas, proteínas, fibra, cenizas, agua y hielo).

Dos modelos populares, propuestos por analogía con los circuitos eléctricos, son el **modelo paralelo** y el **modelo perpendicular**. Habitualmente, la conductividad térmica real de un alimento quedará entre los extremos dados por estos dos modelos, aunque el modelo paralelo es usado con mayor frecuencia.

Es necesario saber si el alimento está congelado o no. Para alimentos congelados, sólo una parte del agua se encuentra presente como hielo, mientras que el resto permanece en fase líquida.

Un alimento congelado estará a una temperatura menor que su *temperatura de congelación inicial*  $T_{f0}$  (que es la temperatura a la cual el alimento comienza a congelarse). En este caso, se determina la fracción masa del hielo usando la ecuación empírica propuesta por Tchigeov (1979):

$$w_{\text{hielo}} = \frac{1.105w_{\text{agua total}}}{1 + \frac{0.7138}{\ln(1 + T_{f0} - T)}}$$

y la fracción masa de agua libre se obtiene por diferencia:

$$w_{\text{agua}} = w_{\text{agua total}} - w_{\text{hielo}}$$

donde  $w_{\text{agua total}}$  se refiere a la fracción masa de agua que contenía el alimento antes de congelarse.

Luego, la fracción volumen de cada componente se estima a partir de la fracción masa y la densidad individual de cada componente:

$$\phi_i = \frac{w_i \rho}{\rho_i}$$

donde la densidad del alimento compuesto está dada por:

$$\rho = \left[ \sum \left( \frac{w_i}{\rho_i} \right) \right]^{-1}$$

y las densidades  $\rho_i$  de los componentes están dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{carbohidrato}} &= 1599.1 - 0.31047T \\ \rho_{\text{grasa}} &= 925.59 - 0.41757T \\ \rho_{\text{proteína}} &= 1329.9 - 0.51814T \\ \rho_{\text{fibra}} &= 1311.5 - 0.36589T \\ \rho_{\text{ceniza}} &= 2423.8 - 0.28063T \\ \rho_{\text{agua}} &= 997.18 + 3.1439 \times 10^{-3}T - 3.7574 \times 10^{-3}T^2 \\ \rho_{\text{hielo}} &= 916.89 - 0.13071T \end{aligned}$$

En estas ecuaciones, la temperatura debe ser en °C y las densidades obtenidas están dadas en kg/m<sup>3</sup>.

La conductividad térmica de los componentes individuales se calcula con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} k_{\text{carbohidrato}} &= 0.2014 + 1.3874 \times 10^{-3}T - 4.3312 \times 10^{-6}T^2 \\ k_{\text{grasa}} &= 0.1807 - 2.7604 \times 10^{-4}T - 1.7749 \times 10^{-7}T^2 \\ k_{\text{proteína}} &= 0.1788 + 1.1959 \times 10^{-3}T - 2.7178 \times 10^{-6}T^2 \\ k_{\text{fibra}} &= 0.1833 + 1.2497 \times 10^{-3}T - 3.1683 \times 10^{-6}T^2 \\ k_{\text{ceniza}} &= 0.3296 + 1.401 \times 10^{-3}T - 2.9069 \times 10^{-6}T^2 \\ k_{\text{agua}} &= 0.57109 + 1.7625 \times 10^{-3}T - 6.7306 \times 10^{-6}T^2 \\ k_{\text{hielo}} &= 2.2196 - 6.2489 \times 10^{-3}T + 1.0154 \times 10^{-4}T^2 \end{aligned}$$

donde la temperatura debe ser en grados Celsius y la conductividad térmica obtenida es en W/m·K.

Finalmente, se calcula la conductividad del alimento de acuerdo al modelo paralelo y al modelo perpendicular:

$$k = \sum \phi_i k_i \quad \text{(modelo paralelo)} \quad \quad \quad k = \frac{1}{\sum (\phi_i / k_i)} \quad \text{(modelo perpendicular)}$$

**FUENTES CONSULTADAS**

Bird, Stewart y Lightfoot (2002). "Transport Phenomena". 2ª edición, Wiley.

Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª edición, McGraw-Hill.

Onita, et al. (2005). "Estimation of the specific heat and thermal conductivity of foods only by their classes of substances contents (water, proteins, fats, carbohydrates, fibers and ash)". Scientific Researches. Agroalimentary Processes and Technologies. XI(1), 217-222.

Poling, Prausnitz y O'Connell (2000). "The Properties of Gases and Liquids". 5ª edición, McGraw-Hill.

Reid, Prausnitz y Sherwood (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª edición, McGraw-Hill.

Welty, Wicks y Wilson (1997). "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa", Limusa.

**LA LETRA PEQUEÑA**

EL ÚNICO PROPÓSITO DE ESTE DOCUMENTO ES SERVIR COMO RECURSO DIDÁCTICO; SU USO DEBE SER EXCLUSIVAMENTE ACADÉMICO. PARTES DE ESTE DOCUMENTO PUEDEN ESTAR SUJETAS A RESTRICCIONES POR DERECHOS DE AUTOR EN ALGUNOS PAÍSES.

ALGUNOS DE LOS MÉTODOS HAN SIDO ADAPTADOS PARA EMPLEAR CONSISTENTEMENTE SIMBOLOGÍA Y/O SISTEMA DE UNIDADES, PARA FACILITAR LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS, O PARA CONCILIAR EN LO POSIBLE DISCREPANCIAS ENTRE LAS DIVERSAS FUENTES CONSULTADAS.

NO SE DA NINGUNA GARANTÍA, EXPLÍCITA O IMPLÍCITA, SOBRE LA EXACTITUD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO, POR LO QUE NO SE RECOMIENDA SU USO EN LA PREPARACIÓN DE DISEÑOS FINALES DE EQUIPOS INDUSTRIALES, PROCESOS QUÍMICOS, O SISTEMAS DE VIAJE A TRAVÉS DEL TIEMPO. EN ESTOS CASOS, SE RECOMIENDA CONSULTAR LAS FUENTES BIBLIOGRÁFICAS ORIGINALES.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
NOTACIÓN .....	1
DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN .....	2
Teoría cinética de Chapman-Enskog	
Teoría cinética modificada por Brokaw para gases polares	
Método de Fuller	
Extrapolación de Hirschfelder	
Método de Wilke para sistemas multicomponente	
DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A ALTA PRESIÓN .....	3
Método de estados correspondientes de Takahashi	
Método de Riazi y Whitson	
Método de He y Yu	
DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA A DILUCIÓN INFINITA .....	4
Modelo de Stokes-Einstein	
Modelo de Wilke-Chang	
Método de Tyn y Calus	
Método de Tyn y Calus simplificado	
Electrolitos en agua – Ecuación de Nernst-Haskell	
Electrolitos en agua – con base en difusividades iónicas	
Polímeros en solución	
DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA A ALTA CONCENTRACIÓN .....	5
Modelo de Vignes	
DIFUSIVIDAD EN FASE SÓLIDA .....	6
FUENTES CONSULTADAS .....	6

## INTRODUCCIÓN

La difusividad (también llamado coeficiente de difusión) es la constante de proporcionalidad que aparece en la ley de Fick de la difusión, relacionando la densidad de flujo molar  $\mathbf{j}_A$  con el gradiente de concentración  $\nabla C_A$

$$\mathbf{j}_A = -\mathcal{D}_{AB} \nabla C_A$$

La difusividad no es una propiedad de una sustancia, ya que no se puede hablar de transferencia de masa en sustancias puras. Es una propiedad de una mezcla, por lo que  $\mathcal{D}_{AB}$  se refiere a la difusividad de la sustancia A en la sustancia B. Generalmente se tiene que  $\mathcal{D}_{AB} \neq \mathcal{D}_{BA}$ , excepto en el caso de gases a baja presión.

Los rangos típicos de valores para la difusividad varían ampliamente dependiendo del estado físico, como se ilustra en la Tabla 1.

**Tabla 1. Valores típicos de difusividades a temperatura ambiente.**

Gases	~ 0.1 cm <sup>2</sup> /s (el más alto es 1.7 cm <sup>2</sup> /s para H <sub>2</sub> -He)
Líquidos	la mayoría ~ 10 <sup>-5</sup> cm <sup>2</sup> /s (excepto solutos de alto peso molecular que pueden ser hasta ~ 10 <sup>-7</sup> cm <sup>2</sup> /s)
Sólidos	≤ 10 <sup>-10</sup> cm <sup>2</sup> /s (hasta 10 <sup>-30</sup> cm <sup>2</sup> /s para Al en Cu)

## NOTACIÓN

Ya que la mayoría de los métodos emplean correlaciones empíricas dimensionales, es necesario usar las unidades especificadas en esta lista salvo cuando se indica lo contrario en el método. Algunos símbolos que se emplean sólo en un método no se incluyen en esta tabla pero se definen en el método.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$\mathcal{D}_{AB}$	Difusividad de A en B	cm <sup>2</sup> /s
$\mathcal{D}_{AB}^0$	Difusividad de A en B a dilución infinita	cm <sup>2</sup> /s
$F$	Constante de Faraday $F = 96500$ C/eq	C/eq
$M$	Peso molecular	g/mol

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$M_{AB}$	Media armónica de pesos moleculares $M_{AB} = 2M_A M_B / (M_A + M_B)$	g/mol
$P$	Presión	bar
$P_c$	Presión crítica	bar
$P_{c,AB}$	Presión pseudocrítica de la mezcla $P_{c,AB} = y_A P_{c,A} + y_B P_{c,B}$	bar
$P_r$	Presión reducida	-
$\mathbb{P}$	Paracoro	g <sup>1/4</sup> .cm <sup>3</sup> /mol.s <sup>1/2</sup>
$R$	Constante universal de los gases $R = 8.314$ J/mol.K	J/mol.K
$T$	Temperatura	K
$T_b$	Punto de ebullición normal (1 atm)	K
$T_{br}$	Temperatura de ebullición reducida	-
$T_c$	Temperatura crítica	K
$T_{c,AB}$	Temperatura pseudocrítica de la mezcla $T_{c,AB} = y_A T_{c,A} + y_B T_{c,B}$	K
$T_r$	Temperatura reducida	-
$\tilde{V}_b$	Volumen molar de líquido saturado en el punto de ebullición normal	cm <sup>3</sup> /mol
$\tilde{V}_c$	Volumen molar en el punto crítico	cm <sup>3</sup> /mol
$w$	Fracción peso	-
$x$	Fracción mol (fase líquida)	-
$y$	Fracción mol (fase gaseosa)	-
$z$	Valencia del ión	-
$\gamma$	Coefficiente de actividad	-
$\delta$	Parámetro polar	-
$\epsilon$	Energía característica	J
$\kappa$	Constante de Boltzmann $\kappa = 1.38066 \times 10^{-23}$ J/K	J/K
$\lambda^0$	Conductancia iónica límite	cm <sup>2</sup> /Ω.eq
$\mu_B$	Viscosidad del solvente	Pa.s
$\mu$	Momento dipolo	debye
$\rho$	Densidad	kg/m <sup>3</sup>
$\rho_r$	Densidad reducida	-
$\sigma$	Diámetro de colisión	Å
$\sigma$	Tensión superficial	N/m
$\phi$	Factor de asociación del solvente	-
$\Omega_{\mathcal{D}}$	Integral de colisión para difusividad	-
$\omega$	Factor acéntrico	-
$\omega_{AB}$	Factor acéntrico de la mezcla $\omega_{AB} = y_A \omega_A + y_B \omega_B$	-

**DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN**  
**INTRODUCCIÓN**

En gases, la difusividad aumenta con la temperatura, y disminuye al aumentar la presión. También disminuye al aumentar el peso molecular. En un gas a baja presión, la difusividad es independiente de la concentración, por lo que sí se cumple que  $\mathcal{D}_{AB} = \mathcal{D}_{BA}$ .

**DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN**  
**TEORÍA CINÉTICA DE CHAPMAN-ENSKOG**

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.002662T^{1.5}}{PM_{AB}^{0.5}\sigma_{AB}^2\Omega_{\mathcal{D}}}$$

Se basa en el modelo de Lennard-Jones para la energía potencial de interacción ( $\varphi_{AB}$ ) entre una molécula de A y una de B:

$$\varphi_{AB}(r) = 4\epsilon_{AB} \left[ \left( \frac{\sigma_{AB}}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_{AB}}{r} \right)^6 \right]$$

donde  $\epsilon_{AB}$  (energía característica, que se suele usar dividida entre la constante de Boltzmann  $\kappa$ ) y  $\sigma_{AB}$  (diámetro de colisión) son parámetros que dependen de las moléculas que interactúan y se obtienen a partir de los valores de las sustancias puras:

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B) \quad \frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} = \left( \frac{\epsilon_A}{\kappa} \cdot \frac{\epsilon_B}{\kappa} \right)^{0.5}$$

$\sigma$  y  $\epsilon/\kappa$  son valores reportados (Tabla 2) y se recomienda que vengan de la misma fuente bibliográfica.

**Tabla 2. Parámetros de Lennard-Jones**

sustancia	$\sigma$	$\epsilon/\kappa$	sustancia	$\sigma$	$\epsilon/\kappa$
	(Å)	(K)		(Å)	(K)
H <sub>2</sub>	2.827	59.7	UF <sub>6</sub>	5.967	236.8
He	2.551	10.22	Hg	2.969	750.0
Ne	2.820	32.8	CH <sub>4</sub>	3.758	148.6
Ar	3.542	93.3	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	4.443	215.7
Kr	3.655	178.9	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	4.163	224.7
Xe	4.047	231.0	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	4.033	231.8
Aire	3.711	78.6	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	5.118	237.1
N <sub>2</sub>	3.798	71.4	CH <sub>3</sub> -CH=CH <sub>2</sub>	4.678	298.9
O <sub>2</sub>	3.467	106.7	CH <sub>3</sub> -C≡CH	4.761	251.8
H <sub>2</sub> O	2.649	356	n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	4.687	531.4
CO	3.690	91.7	iso-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	5.278	330.1
CO <sub>2</sub>	3.941	195.2	n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	5.784	341.1
COS	4.130	336.0	C(CH <sub>3</sub> ) <sub>4</sub>	6.464	193.4
CS <sub>2</sub>	4.483	467.0	n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	5.949	399.3
C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	4.361	348.6	ciclopropano	4.807	248.9
NH <sub>3</sub>	2.900	558.3	ciclohexano	6.182	297.1
NO	3.492	116.7	benceno	5.349	412.3
N <sub>2</sub> O	3.828	232.4	CH <sub>3</sub> -OH	3.626	481.8
SO <sub>2</sub>	4.112	335.4	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	4.530	362.6
F <sub>2</sub>	3.357	112.6	CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	4.600	560.2
Cl <sub>2</sub>	4.217	316.0	CH <sub>3</sub> -O-CH <sub>3</sub>	4.307	395.0
Br <sub>2</sub>	4.296	507.9	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -O-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	5.678	313.8
I <sub>2</sub>	5.160	474.2	CH <sub>3</sub> Cl	4.182	350.0
HF	3.148	330.0	CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	4.898	356.3
HCl	3.339	344.7	CHCl <sub>3</sub>	5.389	340.2
HBr	3.353	449.0	CCl <sub>4</sub>	5.947	322.7
HI	4.211	288.7	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	5.116	280.0
HCN	3.630	569.1	SiH <sub>4</sub>	4.084	207.6
H <sub>2</sub> S	3.623	301.1	SiF <sub>4</sub>	4.880	171.9
SF <sub>6</sub>	5.128	222.1			

Cuando se desconoce  $\sigma$  y  $\epsilon/\kappa$ , se pueden estimar con base en el punto crítico o el punto de ebullición o fusión normales (Tabla 3).

**Tabla 3. Estimación de diámetro de colisión y energía característica**

referencia	punto crítico (preferible)	punto crítico (alternativa)	punto de ebullición	punto de fusión
$\sigma =$	$0.841\tilde{V}_c^{1/3}$	$2.44\left(\frac{T_c}{P_c}\right)^{1/3}$	$1.166\tilde{V}_b^{1/3}$	$1.222\tilde{V}_m^{1/3}$
$\frac{\epsilon}{\kappa} =$	$0.77T_c$	$0.77T_c$	$1.15T_b$	$1.92T_m$

La integral de colisión  $\Omega_{\mathcal{D}}$  (Tabla 4) se puede consultar tabulada en función de la temperatura adimensional  $T^*$ , definida como:

$$T^* = \frac{\kappa T}{\epsilon_{AB}} \quad \text{o bien} \quad T^* = \frac{T}{\epsilon_{AB}/\kappa}$$

**Tabla 4. Integral de colisión (Lennard-Jones)**

$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$	$T^*$	$\Omega_{\mathcal{D}}$
0.25	2.8611	1.30	1.2746	2.7	0.9781	4.8	0.8503
0.30	2.6502	1.35	1.2538	2.8	0.9681	4.9	0.8467
0.35	2.4705	1.40	1.2344	2.9	0.9588	5.0	0.8431
0.40	2.3164	1.45	1.2163	3.0	0.9500	6.0	0.8128
0.45	2.1832	1.50	1.1993	3.1	0.9418	7.0	0.7895
0.50	2.0675	1.55	1.1834	3.2	0.9341	8.0	0.7707
0.55	1.9664	1.60	1.1685	3.3	0.9268	9.0	0.7551
0.60	1.8776	1.65	1.1544	3.4	0.9199	10	0.7419
0.65	1.7993	1.70	1.1412	3.5	0.9133	12	0.7201
0.70	1.7299	1.75	1.1287	3.6	0.9071	14	0.7026
0.75	1.6680	1.80	1.1168	3.7	0.9012	16	0.6879
0.80	1.6127	1.85	1.1056	3.8	0.8956	18	0.6753
0.85	1.5630	1.90	1.0950	3.9	0.8902	20	0.6643
0.90	1.5181	1.95	1.0849	4.0	0.8850	25	0.6416
0.95	1.4774	2.00	1.0754	4.1	0.8801	30	0.6236
1.00	1.4405	2.1	1.0576	4.2	0.8753	35	0.6087
1.05	1.4067	2.2	1.0413	4.3	0.8708	40	0.5962
1.10	1.3758	2.3	1.0265	4.4	0.8664	50	0.5758
1.15	1.3474	2.4	1.0129	4.5	0.8622	75	0.5405
1.20	1.3212	2.5	1.0004	4.6	0.8581	100	0.5167
1.25	1.2971	2.6	0.9888	4.7	0.8541	150	0.4850

Valores calculados con las correlaciones de Neufeld citadas en Reid *et al.*, 1987.

**DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN**  
**TEORÍA CINÉTICA MODIFICADA POR BROKAW**  
**PARA GASES POLARES**

Cuando uno o ambos de los gases son polares, se puede obtener mejores estimaciones de la difusividad. Esta modificación emplea la misma fórmula básica para calcular la difusividad:

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.002662T^{1.5}}{PM_{AB}^{0.5}\sigma_{AB}^2\Omega_{\mathcal{D}}}$$

pero los parámetros de obtienen de forma diferente. Primero, a partir del momento dipolo  $\mu$  (en debye), se calcula un parámetro polar adimensional  $\delta$ , que se emplea luego para estimar el diámetro de colisión  $\sigma$  y la energía característica  $\epsilon/\kappa$  para cada uno de los dos compuestos:

$$\delta = \frac{1940\mu^2}{\tilde{V}_b T_b} \quad \sigma = \left( \frac{1.585\tilde{V}_b}{1 + 1.3\delta^2} \right)^{1/3} \quad \frac{\epsilon}{\kappa} = 1.18(1 + 1.3\delta^2)T_b$$

para luego calcular los parámetros combinados:

$$\delta_{AB} = (\delta_A \delta_B)^{0.5} \quad \sigma_{AB} = \frac{1}{2}(\sigma_A + \sigma_B) \quad \frac{\epsilon_{AB}}{\kappa} = \left( \frac{\epsilon_A}{\kappa} \cdot \frac{\epsilon_B}{\kappa} \right)^{0.5}$$

La integral de colisión lleva una contribución adicional:

$$\Omega_{\mathcal{D}} = \Omega_{\mathcal{D}}(\text{tabulada}) + \frac{0.19\delta_{AB}^2}{T^*}$$

donde  $\Omega_{\mathcal{D}}(\text{tabulada})$  es el valor obtenido de la Tabla 4 empleando el mismo valor de  $T^* = T / (\epsilon_{AB} / \kappa)$ .

#### DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN MÉTODO DE FULLER

$$\mathcal{D}_{AB} = \frac{0.00143T^{1.75}}{PM_{AB}^{0.5} \left[ (\Sigma V_A)^{1/3} + (\Sigma V_B)^{1/3} \right]^2}$$

Los valores de  $\Sigma V$  para algunas moléculas simples se obtienen directamente de la Tabla 5; para otros compuestos deben estimarse por contribución de grupos empleando los valores de la Tabla 6.

**Tabla 5. Volúmenes moleculares de difusión para algunas moléculas simples (método de Fuller)**

MOLÉCULA	$\Sigma V$	MOLÉCULA	$\Sigma V$	MOLÉCULA	$\Sigma V$	MOLÉCULA	$\Sigma V$
H <sub>2</sub>	6.12	He	2.67	CO	18.0	Cl <sub>2</sub>	38.4
D <sub>2</sub>	6.84	Ne	5.98	CO <sub>2</sub>	26.9	Br <sub>2</sub>	69.0
N <sub>2</sub>	18.5	Ar	16.2	N <sub>2</sub> O	35.9	SO <sub>2</sub>	41.8
O <sub>2</sub>	16.3	Kr	24.5	NH <sub>3</sub>	20.7	SF <sub>6</sub>	71.3
Aire	19.7	Xe	32.7	H <sub>2</sub> O	13.1	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	114.8

**Tabla 6 Contribuciones de grupo para volúmenes moleculares de difusión (método de Fuller)**

ÁTOMO	v	ÁTOMO	v	ÁTOMO	v	ÁTOMO	v
C	15.9	H	2.31	O	6.11	N	4.54
F	14.7	Cl	21.0	Br	21.9	I	29.8
S	22.9	Cierre de anillo					-18.3

#### DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN EXTRAPOLACIÓN DE HIRSCHFELDER

Se emplea para estimar la difusividad a una cierta temperatura  $T_2$  y presión  $P_2$  cuando ya se tiene como dato la difusividad a otra temperatura  $T_1$  y presión  $P_1$  conocidas.

$$\mathcal{D}_{AB@T_2, P_2} = \mathcal{D}_{AB@T_1, P_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1.5} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)$$

ando el rango de temperatura es grande, se necesita incluir también un factor adicional relacionando las integrales de colisión a ambas temperaturas:

$$\mathcal{D}_{AB@T_2, P_2} = \mathcal{D}_{AB@T_1, P_1} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1.5} \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \left( \frac{\Omega_{\mathcal{D}@T_1}}{\Omega_{\mathcal{D}@T_2}} \right)$$

#### DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A BAJA PRESIÓN MÉTODO DE WILKE PARA SISTEMAS MULTICOMPONENTE

Para verdaderas mezclas multicomponente, la difusividad de un componente en la mezcla depende de las difusividades de todos los pares de componentes. El método de Wilke da resultados aproximados pero satisfactorios. La difusividad del componente 1 en la mezcla está dado por:

$$\mathcal{D}_{1-m} = \frac{1}{y'_2 / \mathcal{D}_{1-2} + y'_3 / \mathcal{D}_{1-3} + \dots + y'_n / \mathcal{D}_{1-n}}$$

con ecuaciones similares para los demás componentes de la mezcla. Las fracciones mol de cada componente que se emplean en la ecuación son las fracciones equivalentes en base libre del componente 1, y están dadas por:

$$y'_i = \frac{y_i}{y_2 + y_3 + \dots + y_n} = \frac{y_i}{1 - y_1}$$

#### DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A ALTA PRESIÓN INTRODUCCIÓN

No existe un valor específico de presión a partir del cual se considere "alta". Normalmente los métodos para gases a baja presión comienzan a mostrar desviaciones significativas a presiones de 10 atmósferas o mayores. A diferencia de los gases a baja presión, la difusividad sí depende de la composición cuando la presión es alta.

Los métodos para gases a alta presión generalmente requieren de datos a la misma temperatura del sistema pero a baja presión (indicado aquí con un asterisco \*). Esta baja presión suele ser 1 bar ó 1 atm, aunque puede ser otra presión siempre y cuando sea baja presión.

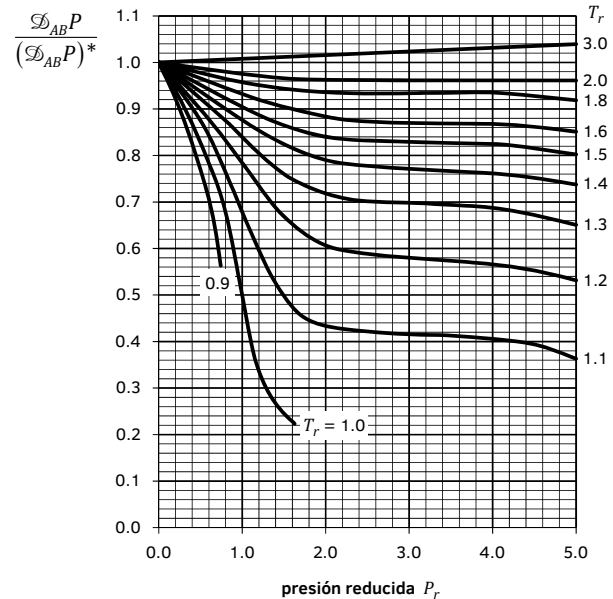
Normalmente las propiedades reducidas se calculan empleando las propiedades pseudocríticas de la mezcla, obtenidas con la fracción mol y la propiedad crítica correspondiente de cada componente puro:

$$T_{c,AB} = y_A T_{c,A} + y_B T_{c,B} \quad T_r = T / T_{c,AB}$$

$$P_{c,AB} = y_A P_{c,A} + y_B P_{c,B} \quad P_r = P / P_{c,AB}$$

#### DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A ALTA PRESIÓN MÉTODO DE ESTADOS CORRESPONDIENTES DE TAKAHASHI

La relación entre el producto  $\mathcal{D}_{AB}P$  y su correspondiente valor a baja presión  $(\mathcal{D}_{AB}P)^*$  está dado en función de las condiciones reducidas de acuerdo a la Figura 1.



**Figura 1. Correlación de estados correspondientes de Takahashi (Adaptado de Reid et al., 1987).**

**DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A ALTA PRESIÓN**  
MÉTODO DE RIAZI Y WHITSON

$$\frac{\rho \mathcal{D}_{AB}}{(\rho \mathcal{D}_{AB})^*} = 1.07 \left( \frac{\mu}{\mu^*} \right)^{b+cP_r}$$

Para calcular la presión reducida  $P_r$  se emplea la presión pseudocrítica de la mezcla, mientras que  $b$  y  $c$  son funciones del factor acéntrico de la mezcla  $\omega_{AB}$ :

$$b = -0.38\omega_{AB} - 0.27 \quad c = 0.1\omega_{AB} - 0.05$$

Este método no se debe usar para estimar difusividades a baja presión porque no predice el valor correcto de difusividad. Otra dificultad que presenta es que la viscosidad  $\mu$  y la viscosidad a baja presión  $\mu^*$  generalmente dependen también de la composición.

**DIFUSIVIDAD EN FASE GASEOSA A ALTA PRESIÓN**  
MÉTODO DE HE Y YU

$$\mathcal{D}_{AB} = 1 \times 10^{-5} \alpha \left( \frac{T}{M_A} \right)^{0.5} \exp \left( \frac{-0.3887\rho_{B,r}}{1 - 0.23\rho_{B,r}} \right)$$

donde  $\alpha$  es un factor que depende únicamente de las propiedades del solvente:

$$\alpha = 14.882 + 5.908 \times 10^{-3} \left( \frac{T_{c,B} V_{c,B}}{M_B} \right) + 2.0821 \times 10^{-6} \left( \frac{T_{c,B} V_{c,B}}{M_B} \right)^2$$

y la densidad reducida del solvente está dada por  $\rho_{B,r} = \rho_B / \rho_{B,c}$ , con la densidad del solvente  $\rho_B$  evaluada a la temperatura y presión del sistema. El método original cubre los rangos  $0.66 < T_r < 1.78$  y  $0.22 < \rho_{B,r} < 2.62$ , y probablemente no sea confiable fuera de esos rangos.

**DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA**  
INTRODUCCIÓN

Los modelos para estimar coeficientes de difusión en líquidos no son tan exactos como para gases. En un líquido, la difusividad aumenta cuando aumenta la temperatura, disminuye cuando aumenta el peso molecular, y casi no es afectada por la presión.

La difusividad depende fuertemente de la concentración, por lo que en muchos casos sólo puede estimarse para concentraciones muy bajas, es decir a dilución infinita (indicado con un superíndice cero). Por lo tanto,  $\mathcal{D}_{AB}^0$  representa la difusividad de A a dilución infinita en B; es decir, que cada molécula de A está rodeada prácticamente de B puro.

Ya que pocas veces se puede estimar el efecto de la concentración, desde el punto de vista práctico se asume que la difusividad a dilución infinita aplica para mayores concentraciones, a veces tan altas como 5 ó 10% mol de A en B.

**DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA A DILUCIÓN INFINITA**  
MODELO DE STOKES-EINSTEIN

El modelo de Stokes-Einstein asume que A es un soluto esférico moviéndose en un solvente B viscoso.

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = \frac{\kappa T}{6\pi\mu_B r_A}$$

donde  $\mu_B$  es la viscosidad del solvente B y  $r_A$  el radio (hipotético) del soluto. **Se debe emplear unidades SI con esta ecuación.**  $\mu_B$  debe estar en Pa·s,  $r_A$  en m, y por cancelación de unidades  $\mathcal{D}_{AB}^0$  estará en m<sup>2</sup>/s.

Este método sólo da resultados confiables para solutos de estructura molecular aproximadamente esférica y alto peso molecular (como es el caso para algunos polímeros y biomoléculas). Para moléculas que no cumplen con estas características, este modelo es de limitada aplicación práctica ya que llega a tener errores muy altos, pero se ha usado como base para desarrollar otras correlaciones.

**DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA A DILUCIÓN INFINITA**  
MODELO DE WILKE-CHANG

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 7.4 \times 10^{-11} \frac{(\phi M_B)^{0.5} T}{\mu_B \tilde{V}_{b,A}^{0.6}}$$

donde  $\phi$  es un factor adimensional de asociación del solvente (2.6 para agua, 1.9 para metanol, 1.5 para etanol, y 1.0 si no es un solvente asociado).

El modelo de Wilke-Chang es bastante usado pero en algunos casos puede llegar a tener errores elevados. Este método no debe emplearse cuando el soluto es agua.

**DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA A DILUCIÓN INFINITA**  
MÉTODO DE TYN Y CALUS

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{\tilde{V}_{b,A}}{\tilde{V}_{b,A}^2} \right)^{1/6} \left( \frac{\mathbb{P}_B}{\mathbb{P}_A} \right)^{0.6} \frac{T}{\mu_B}$$

Al emplear este método, los errores suelen estar por debajo del 10%. El método tiene las siguientes restricciones:

1. No se debe emplear para difusión en solventes viscosos (alrededor de 20 cP o más).
2. Si el solvente es agua, usar los siguientes valores para el volumen molar y el paracoro:  
 $\tilde{V}_{b,B} = \tilde{V}_{b,H_2O} = 18.7 \text{ cm}^3/\text{mol}$   
 $\mathbb{P}_B = \mathbb{P}_{H_2O} = 52.6 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$ .
3. Si el soluto es agua, se debe considerar como un dímero y duplicar el volumen molar y el paracoro, por lo que se usa:  
 $\tilde{V}_{b,A} = 2\tilde{V}_{b,H_2O} = 37.4 \text{ cm}^3/\text{mol}$   
 $\mathbb{P}_A = 2\mathbb{P}_{H_2O} = 105.2 \text{ g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3/\text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$ .
4. Si el soluto es un ácido orgánico y el solvente no es metanol ni butanol, el ácido se debe tratar como un dímero, por lo que  $\tilde{V}_{b,A}$  y  $\mathbb{P}_A$  se deben multiplicar por dos.
5. Para el caso de solutos no polares difundiendo en monoalcoholes, los valores de  $\tilde{V}_{b,B}$  y  $\mathbb{P}_B$  se deben multiplicar por un factor numéricamente igual a  $8\mu_B$  donde  $\mu_B$  es la viscosidad del solvente en cP.

Si se dispone de la tensión superficial de los componentes puros, la ecuación de Tyn y Calus se puede recomodar haciendo uso de la definición del paracoro para llegar a:

$$\mathcal{D}_{AB}^0 = 8.93 \times 10^{-11} \left( \frac{\tilde{V}_{b,B}^{0.266}}{\tilde{V}_{b,A}^{0.433}} \right) \left( \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right)^{0.15} \frac{T}{\mu_B}$$

Donde la tensión superficial de cada componente debe ser evaluada a la temperatura de ebullición correspondiente.

**DIFUSIVIDAD EN FASE LÍQUIDA A DILUCIÓN INFINITA**  
MÉTODO DE TYN Y CALUS SIMPLIFICADO

Muchos líquidos orgánicos tienen valores similares de tensión superficial, por lo que su efecto en el paracoro en la ecuación de Tyn y Calus se puede despreciar, simplificándose a:



## DIFUSIVIDAD EN FASE SÓLIDA

No se tienen modelos adecuados y en la mayoría de los casos hay que usar valores experimentales. El método descrito a continuación se puede emplear para estimaciones burdas de difusividades en metales:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 e^{-\Delta H_0 / RT}$$

donde  $\mathcal{D}_0$  y  $\Delta H_0$  son parámetros empíricos que se pueden estimar de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{D}_0 = a_0^2 v e^{-\beta \Delta H_f / RT_f}$$
$$v = \left( \frac{\Delta H_0}{2a_0^2 M} \right)^{1/2} \quad \Delta H_0 = \left( 36 \frac{\text{cal}}{\text{molK}} \right) T_f$$

donde  $a_0$  es el espacio entre átomos (estimado por cristalografía),  $T_f$  es la temperatura del punto de fusión,  $\Delta H_f$  es la entalpía de fusión y  $\beta$  es un parámetro empírico aproximadamente igual a 0.4.

## FUENTES CONSULTADAS

- Bird, Stewart y Lightfoot (2002). "Transport Phenomena". 2ª ed., Wiley.
- Cussler (1997). "Diffusion: Mass Transfer in Engineering Systems". Cambridge University Press.
- Dean (1989). "Lange: Manual de Química". 13ª ed., McGraw-Hill.
- Reid, Prausnitz y O'Connell (2000). "The Properties of Gases and Liquids". 5ª ed., McGraw-Hill.
- Reid, Prausnitz y Sherwood (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª ed., McGraw-Hill.
- Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª ed., McGraw-Hill.
- Welty, Rorrer y Foster (2013). "Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer", Wiley.
- Welty, Wicks y Wilson (1997). "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa", Limusa.

## LA LETRA PEQUEÑA

EL ÚNICO PROPÓSITO DE ESTE DOCUMENTO ES SERVIR COMO RECURSO DIDÁCTICO; SU USO DEBE SER EXCLUSIVAMENTE ACADÉMICO. PARTES DE ESTE DOCUMENTO PUEDEN ESTAR SUJETAS A RESTRICCIONES POR DERECHOS DE AUTOR EN ALGUNOS PAÍSES.

ALGUNOS DE LOS MÉTODOS HAN SIDO ADAPTADOS PARA EMPLEAR CONSISTENTEMENTE SIMBOLOGÍA Y/O SISTEMA DE UNIDADES, PARA FACILITAR LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS, O PARA CONCILIAR EN LO POSIBLE DISCREPANCIAS ENTRE LAS DIVERSAS FUENTES CONSULTADAS.

NO SE DA NINGUNA GARANTÍA, EXPLÍCITA O IMPLÍCITA, SOBRE LA EXACTITUD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO, POR LO QUE NO SE RECOMIENDA SU USO EN LA PREPARACIÓN DE DISEÑOS FINALES DE EQUIPOS INDUSTRIALES, PROCESOS QUÍMICOS, O SISTEMAS DE VIAJE A TRAVÉS DEL TIEMPO. EN ESTOS CASOS, SE RECOMIENDA CONSULTAR LAS FUENTES BIBLIOGRÁFICAS ORIGINALES.

# Algunos Métodos de Estimación para Volumen de Líquido Saturado $\tilde{V}_b$

## NOTACIÓN

Ya que la mayoría de los métodos emplean correlaciones empíricas dimensionales, es necesario usar las unidades especificadas en esta lista salvo cuando se indica lo contrario en el método. Algunos símbolos que se emplean sólo en un método no se incluyen en esta tabla pero se definen en el método.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$\tilde{V}_b$	Volumen molar de líquido saturado en el punto de ebullición normal	cm <sup>3</sup> /mol
$\tilde{V}_c$	Volumen molar en el punto crítico	cm <sup>3</sup> /mol

## INTRODUCCIÓN

El volumen molar de líquido saturado representa el volumen ocupado por un mol de la sustancia, en estado líquido, en su punto de ebullición normal (a una presión de 1 atm). Habitualmente se maneja en cm<sup>3</sup>/mol.

Este volumen es un parámetro empleado en ocasiones en relación al volumen molecular, ya que en esta condición las moléculas aún están en íntimo contacto (por ser líquido) pero a la máxima distancia que permiten las fuerzas intermoleculares (por estar a punto de pasar a fase gaseosa).

El volumen molar de líquido saturado de algunos compuestos se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Datos experimentales de volumen molar de líquido saturado (cm<sup>3</sup>/mol)

Sustancia	$\tilde{V}_b$	Sustancia	$\tilde{V}_b$	Sustancia	$\tilde{V}_b$
H <sub>2</sub>	14.3	N <sub>2</sub> O	36.4	n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	96.7
Aire	29.9	SO <sub>2</sub>	44.8	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	96.0
N <sub>2</sub>	31.2	Cl <sub>2</sub>	48.4	C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> -CH <sub>3</sub>	118.2
O <sub>2</sub>	25.6	Br <sub>2</sub>	53.4	CH <sub>3</sub> -OH	42.8
H <sub>2</sub> O	18.7	I <sub>2</sub>	71.5	C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> -OH	60.8
CO	30.7	H <sub>2</sub> S	32.9	CH <sub>3</sub> -CO-CH <sub>3</sub>	77.4
CO <sub>2</sub>	34.9	CH <sub>4</sub>	38.0	CH <sub>3</sub> Cl	50.3
COS	51.5	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	55.2	CHCl <sub>3</sub>	82.5
NH <sub>3</sub>	25.8	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	49.4	CCl <sub>4</sub>	103.7
NO	23.6	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	75.9	CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	81.2

Datos reportados en Welty (2013) y calculados a partir de datos reportados en Perry (2004)

## VOLUMEN MOLAR DE LÍQUIDO SATURADO MÉTODO DE TYN Y CALUS

El volumen molar en el punto de ebullición se puede estimar a partir del volumen molar en el punto crítico. Ambos volúmenes están dados en cm<sup>3</sup>/mol.

$$\tilde{V}_b = 0.285\tilde{V}_c^{1.048}$$

## VOLUMEN MOLAR DE LÍQUIDO SATURADO MÉTODO ADITIVO DE LE BAS

Se suman las contribuciones (Tabla 2) correspondientes a cada elemento, multiplicando por el número de átomos de ese tipo que haya en la molécula.

Tabla 2. Contribuciones para volumen de líquido saturado en el punto de ebullición normal (método de Le Bas)

Grupo	Incremento $\Delta\tilde{V}_b$
Carbono	14.8
Hidrógeno	3.7
Oxígeno	
en ésteres y éteres metálicos	9.1
en ésteres y éteres etélicos	9.9
en ésteres y éteres superiores	11.0
en ácidos	12.0
unido a S, P o N	8.3
en cualquier otro caso	7.4
Nitrógeno	
con doble enlace	15.6
en aminas primarias	10.5
en aminas secundarias	12.0
Bromo	27.0
Cloro	24.6
Flúor	8.7
Yodo	37.0
Azufre	25.6
Cierre de anillos	
de 3 átomos	-6.0
de 4 átomos	-8.5
de 5 átomos	-11.5
de 6 átomos	-15.0
naftaleno	-30.0
antraceno	-47.5

## FUENTES CONSULTADAS

Reid, Prausnitz y Poling (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª edición, McGraw-Hill.

Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª edición, McGraw-Hill.

## LA LETRA PEQUEÑA

EL ÚNICO PROPÓSITO DE ESTE DOCUMENTO ES SERVIR COMO RECURSO DIDÁCTICO; SU USO DEBE SER EXCLUSIVAMENTE ACADÉMICO. PARTES DE ESTE DOCUMENTO PUEDEN ESTAR SUJETAS A RESTRICCIONES POR DERECHOS DE AUTOR EN ALGUNOS PAÍSES.

ALGUNOS DE LOS MÉTODOS HAN SIDO ADAPTADOS PARA EMPLEAR CONSISTENTEMENTE SIMBOLOGÍA Y/O SISTEMA DE UNIDADES, PARA FACILITAR LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS, O PARA CONCILIAR EN LO POSIBLE DISCREPANCIAS ENTRE LAS DIVERSAS FUENTES CONSULTADAS.

NO SE DA NINGUNA GARANTÍA, EXPLÍCITA O IMPLÍCITA, SOBRE LA EXACTITUD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO, POR LO QUE NO SE RECOMIENDA SU USO EN LA PREPARACIÓN DE DISEÑOS FINALES DE EQUIPOS INDUSTRIALES, PROCESOS QUÍMICOS, O SISTEMAS DE VIAJE A TRAVÉS DEL TIEMPO. EN ESTOS CASOS, SE RECOMIENDA CONSULTAR LAS FUENTES BIBLIOGRÁFICAS ORIGINALES.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
TENSIÓN SUPERFICIAL DE COMPUESTOS PUROS.....	1
Método de estados correspondientes de Brock y Bird	
Método de Macleod-Sugden	
TENSIÓN SUPERFICIAL DE MEZCLAS.....	1
Introducción	
Método de Winterfeldt, Scriven y Davis	
Método de Tamura, Kurata y Odani	
FUENTES CONSULTADAS.....	2

## NOTACIÓN

Ya que la mayoría de los métodos emplean correlaciones empíricas dimensionales, es necesario usar las unidades especificadas en esta lista salvo cuando se indica lo contrario en el método. Algunos símbolos que se emplean sólo en un método no se incluyen en esta tabla pero se definen en el método.

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$\mathbb{P}$	Paracoro	$\text{g}^{1/4}\cdot\text{cm}^3/\text{mol}\cdot\text{s}^{1/2}$
$P_c$	Presión crítica	bar
$T_b$	Punto de ebullición normal (@ 1 atm)	K
$T_{br}$	Temperatura de ebullición reducida $T_{br} = T_b / T_c$	-
$T_r$	Temperatura reducida $T_r = T / T_c$	-
$T_c$	Temperatura crítica	K
$\tilde{V}$	Volumen molar de líquido	$\text{cm}^3/\text{mol}$
$x$	Fracción mol (fase líquida)	-
$\rho_{m,L}$	Densidad molar de líquido	$\text{mol}/\text{cm}^3$
$\rho_{m,V}$	Densidad molar de vapor	$\text{mol}/\text{cm}^3$
$\sigma$	Tensión superficial	N/m

## INTRODUCCIÓN

La tensión superficial es la tendencia que tienen los líquidos a reducir su área superficial. Esto se debe a que las moléculas en la superficie experimentan una fuerza neta de atracción hacia el interior del líquido. La tensión superficial es la responsable de que una superficie líquida se comporte como si fuera una membrana elástica.

Para la mayoría de las sustancias, la tensión superficial disminuye de forma casi lineal con respecto a la temperatura absoluta, y se vuelve cero en el punto crítico.

La tensión superficial de la mayoría de los líquidos orgánicos suele estar en el rango de 0.025 a 0.040 N/m. Los metales líquidos típicamente están entre 0.3 y 0.6 N/m. El agua pura tiene una tensión superficial bastante alta, 0.072 N/m a temperatura ambiente, sin embargo disminuye bastante con la presencia de impurezas. Algunos valores representativos de tensión superficial se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Tensión superficial de líquidos representativos a 20°C

LÍQUIDO	$\sigma$ [N/m]	LÍQUIDO	$\sigma$ [N/m]
hexano	0.0184	benceno	0.0289
octano	0.0218	glicerina	0.0630
metanol	0.0226	agua	0.0728
$\text{CCl}_4$	0.0270	mercurio	0.4840

## TENSIÓN SUPERFICIAL DE COMPUESTOS PUROS

### MÉTODO DE ESTADOS CORRESPONDIENTES DE BROCK Y BIRD

A falta de valores experimentales, la tensión superficial se puede estimar a partir de las propiedades críticas y el punto de ebullición del compuesto:

$$\sigma = 1 \times 10^{-3} (0.132\alpha_c - 0.278) P_c^{2/3} T_c^{1/3} (1 - T_r)^{11/9}$$

donde el parámetro  $\alpha_c$  está dado por:

$$\alpha_c = 0.9076 \left[ 1 + \frac{T_{br}}{1 - T_{br}} \ln \left( \frac{P_c}{1.013} \right) \right]$$

## TENSIÓN SUPERFICIAL DE COMPUESTOS PUROS

### MÉTODO DE MACLEOD-SUGDEN

La tensión superficial puede estimarse también a partir del paracoro:

$$\sigma = 0.001 [\mathbb{P}(\rho_{m,L} - \rho_{m,V})]^4$$

donde las densidades molares de líquido y vapor son a la temperatura y presión del sistema. A bajas presiones, la densidad molar del vapor es muy pequeña y se puede despreciar.

El paracoro puede estimarse a su vez con el método de contribución de grupos de Quayle.

## TENSIÓN SUPERFICIAL DE MEZCLAS

### INTRODUCCIÓN

La tensión superficial no es una función simple de las tensiones superficiales de los componentes puros, especialmente porque la composición química de la interfase puede ser diferente de la composición global.

En particular, para soluciones acuosas, la tensión superficial es una función no lineal de la tensión superficial de los componentes puros, ya que incluso una pequeña concentración del compuesto orgánico afecta fuertemente la tensión superficial de la mezcla.

## TENSIÓN SUPERFICIAL DE MEZCLAS

### MÉTODO DE WINTERFELD, SCRIVEN Y DAVIS

Este método es aplicable sólo para **mezclas no acuosas**. Para un sistema binario:

$$\sigma_m = \xi_1^2 \sigma_1 + 2\xi_1 \xi_2 (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} + \xi_2^2 \sigma_2$$

y para un sistema de  $n$  componentes:

$$\sigma_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \xi_j (\sigma_i \sigma_j)^{1/2}$$

donde los parámetros  $\xi$  están definidos como:

$$\xi_i = \frac{x_i \tilde{V}_i}{\tilde{V}_m}$$

y el volumen molar de la mezcla líquida está dado por:

$$\tilde{V}_m = \sum_{i=1}^n x_i \tilde{V}_i$$

Para este método, el error promedio es alrededor del 3-4%.

### TENSIÓN SUPERFICIAL DE MEZCLAS MÉTODO DE TAMURA, KURATA Y ODANI

Este método es aplicable para la **mezcla de un compuesto orgánico en agua**:

$$\sigma_m^{1/4} = \psi_w \sigma_w^{1/4} + \psi_o \sigma_o^{1/4}$$

donde el subíndice  $w$  se refiere al agua, y el subíndice  $o$  se refiere al componente orgánico.

El parámetro  $\psi_w$  está dado por la ecuación:

$$\log_{10} \frac{(\psi_w)^q}{(1-\psi_w)} = \frac{441}{T} \left[ \sigma_o \tilde{V}_o^{2/3} - q \sigma_w \tilde{V}_w^{2/3} \right] + \log_{10} \left[ \frac{(x_w \tilde{V}_w)^q}{x_o \tilde{V}_o} (x_w \tilde{V}_w + x_o \tilde{V}_o)^{1-q} \right]$$

y el correspondiente parámetro para el componente orgánico es simplemente  $\psi_o = 1 - \psi_w$ .

El parámetro  $q$  es una constante que depende del tipo de compuesto orgánico y su número de átomos de carbono:

- **Alcoholes:**  $q$  es el número de átomos de carbono.
- **Ácidos grasos:**  $q$  es el número de átomos de carbono.
- **Cetonas:**  $q$  es el número de átomos de carbono menos uno.
- **Derivados halogenados de ácidos grasos:**  $q$  es el número de átomos de carbono, multiplicado por el volumen molar de líquido del derivado halogenado, dividido entre el volumen molar de líquido del ácido graso original (no halogenado).

Errores típicos para este método son menores del 10% para  $q < 5$  y menores al 20% para  $q > 5$ .

### FUENTES CONSULTADAS

- Fox y McDonald (1995). "Introducción a la Mecánica de Fluidos". 4ª edición, McGraw-Hill.
- Reid, Prausnitz y Poling (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª edición, McGraw-Hill.
- Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª edición, McGraw-Hill.

### LA LETRA PEQUEÑA

EL ÚNICO PROPÓSITO DE ESTE DOCUMENTO ES SERVIR COMO RECURSO DIDÁCTICO; SU USO DEBE SER EXCLUSIVAMENTE ACADÉMICO. PARTES DE ESTE DOCUMENTO PUEDEN ESTAR SUJETAS A RESTRICCIONES POR DERECHOS DE AUTOR EN ALGUNOS PAÍSES.

ALGUNOS DE LOS MÉTODOS HAN SIDO ADAPTADOS PARA EMPLEAR CONSISTENTEMENTE SIMBOLOGÍA Y/O SISTEMA DE UNIDADES, PARA FACILITAR LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS, O PARA CONCILIAR EN LO POSIBLE DISCREPANCIAS ENTRE LAS DIVERSAS FUENTES CONSULTADAS.

NO SE DA NINGUNA GARANTÍA, EXPLÍCITA O IMPLÍCITA, SOBRE LA EXACTITUD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO, POR LO QUE NO SE RECOMIENDA SU USO EN LA PREPARACIÓN DE DISEÑOS FINALES DE EQUIPOS INDUSTRIALES, PROCESOS QUÍMICOS, O SISTEMAS DE VIAJE A TRAVÉS DEL TIEMPO. EN ESTOS CASOS, SE RECOMIENDA CONSULTAR LAS FUENTES BIBLIOGRÁFICAS ORIGINALES.

# Algunos Métodos de Estimación para Paracoro

P

## NOTACIÓN

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$M$	Peso molecular	g/mol
$\mathbb{P}$	Paracoro	$\text{g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3 / \text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$
$\tilde{V}$	Volumen molar de líquido	$\text{cm}^3 / \text{mol}$
$\rho$	Densidad	$\text{g} / \text{cm}^3$
$\sigma$	Tensión superficial	dina/cm

## INTRODUCCIÓN

El paracoro (en inglés: **parachor**) fue originalmente empleado por Sugden (1924) relacionando la tensión superficial con las densidades molares de líquido y vapor. La definición equivalente del paracoro es:

$$\mathbb{P} \equiv \frac{M\sigma^{1/4}}{(\rho_L - \rho_V)}$$

Ya que la densidad de vapor suele ser despreciable comparada con la densidad del líquido, el paracoro se simplifica generalmente a:

$$\mathbb{P} = \tilde{V}\sigma^{1/4}$$

donde el volumen molar del líquido ( $\tilde{V}$  en  $\text{cm}^3 / \text{mol}$ ) y la tensión superficial ( $\sigma$  en dina/cm) son medidos a la misma temperatura.

En rangos moderados de temperatura, el paracoro es esencialmente constante. La Tabla 1 muestra valores experimentales del paracoro para varias sustancias.

Tabla 1. Valores experimentales del paracoro ( $\text{g}^{1/4} \cdot \text{cm}^3 / \text{mol} \cdot \text{s}^{1/2}$ )

sustancia	$\mathbb{P}$	sustancia	$\mathbb{P}$	sustancia	$\mathbb{P}$
$\text{H}_2\text{O}$	52.7	n-C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	270.4	etilbenceno	284.3
$\text{CH}_4$	72.6	n-C <sub>7</sub> H <sub>16</sub>	310.8	o-xileno	417.6
$\text{C}_2\text{H}_6$	110.5	n-C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	351.2	m-xileno	412.3
$\text{C}_2\text{H}_4$	100.4	ciclopentano	205.0	p-xileno	411.5
$\text{C}_3\text{H}_8$	150.8	ciclohexano	241.7	$\text{CH}_3\text{-CO-CH}_3$	161.2
n-C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	190.3	benceno	206.1	$\text{CHCl}_3$	183.4
n-C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	231.5	tolueno	245.9	$\text{CCl}_4$	219.7

El paracoro del agua fue calculado con base en los datos a 20 °C. Los demás valores están reportados en Escobedo y Mansoori (1996) que a su vez cita a Sugden (1924).

## PARACORO

### MÉTODO DE CONTRIBUCIÓN DE GRUPOS

El paracoro se puede estimar sumando los incrementos correspondientes a cada parte de la molécula ( $\Delta\mathbb{P}$ ). Al dividir la molécula, se debe usar los grupos más grandes posibles.

$$\mathbb{P} = \sum \Delta\mathbb{P}$$

Tabla 2. Contribuciones de grupos para el paracoro

GRUPO	$\Delta\mathbb{P}$
C	9.0
H	15.5
$\text{CH}_3\text{-}$	55.0
$(\text{-CH}_2\text{-})_n$ $1 \leq n \leq 12$	$40.0n$
$(\text{-CH}_2\text{-})_n$ $n \geq 13$	$40.3n$

GRUPO	$\Delta\mathbb{P}$
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\   \\ \text{CH}_3\text{-CH-} \end{array}$ 1-metil-etil	133.3
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\   \\ \text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH-} \end{array}$ 1-metil-propil	171.9
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\   \\ \text{CH}_3\text{-CH-CH}_2\text{-} \end{array}$ 2-metil-propil	173.3
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\   \\ \text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH}_2\text{-CH-} \end{array}$ 1-metil-butil	211.7
$\begin{array}{c} \text{C}_2\text{H}_5 \\   \\ \text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-CH-} \end{array}$ 1-etil-propil	209.5
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\   \\ \text{CH}_3\text{-C-} \\   \\ \text{CH}_3 \end{array}$ 1,1-dimetil-etil	170.4
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\   \\ \text{CH}_3\text{-CH}_2\text{-C-} \\   \\ \text{CH}_3 \end{array}$ 1,1-dimetil-propil	207.5
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \text{ CH}_3 \\   \quad   \\ \text{CH}_3\text{-CH-CH-} \end{array}$ 1,2-dimetil-propil	207.9
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \text{ CH}_3 \\   \quad   \\ \text{CH}_3\text{-CH-C-} \\   \\ \text{CH}_3 \end{array}$ 1,1,2-trimetil-propil	243.5
$\text{C}_6\text{H}_5\text{-}$ fenil	189.6
Doble enlace terminal	19.1
Doble enlace en posición 2,3	17.7
Doble enlace en posición 3,4 y siguientes	16.3
Doble enlace en anillo	19.1
Triple enlace	40.6
Cierre de anillo de 3 átomos	12.0
Cierre de anillo de 4 átomos	6.0
Cierre de anillo de 5 átomos	3.0
Cierre de anillo de 6 átomos	0.8
-OH	29.8
-O-	20.0
-CHO	66.0
-COOH	73.8
-COO-	63.8
-CN	64.5
-NH <sub>2</sub>	42.5
-NH-	30.0
-NO <sub>2</sub>	74.0
-NO <sub>3</sub>	93.0
-CO(NH <sub>2</sub> )	91.7
-CO- en cetona de 3 carbonos	51.3
-CO- en cetona de 4 carbonos	49.0
-CO- en cetona de 5 carbonos	47.5

GRUPO	$\Delta P$
-CO- en cetona de 6 carbonos	46.3
-CO- en cetona de 7 carbonos	45.3
-CO- en cetona de 8 carbonos	44.1
O (diferente de los casos anteriores)	20.0
N (diferente de los casos anteriores)	17.5
S	49.1
P	40.5
F	26.1
Cl	55.2
Br	68.0
I	90.3
Si (en silanos)	43.3
Si (en otros casos)	30.3
B	13.2
Al	34.9

#### FUENTES CONSULTADAS

Escobedo y Mansoori (1996). "Surface Tension Prediction for Pure Fluids". AICHE Journal, 42(5).

Perry (2004). "Manual del Ingeniero Químico". 7ª edición, McGraw-Hill.

Reid, Prausnitz y Poling (1987). "The Properties of Gases and Liquids". 4ª edición, McGraw-Hill.

Sugden (1924). "The Variation of Surface Tension with Temperature and some Related Functions". J. Chem. Soc., 125(32).

#### LA LETRA PEQUEÑA

EL ÚNICO PROPÓSITO DE ESTE DOCUMENTO ES SERVIR COMO RECURSO DIDÁCTICO; SU USO DEBE SER EXCLUSIVAMENTE ACADÉMICO. PARTES DE ESTE DOCUMENTO PUEDEN ESTAR SUJETAS A RESTRICCIONES POR DERECHOS DE AUTOR EN ALGUNOS PAÍSES.

ALGUNOS DE LOS MÉTODOS HAN SIDO ADAPTADOS PARA EMPLEAR CONSISTENTEMENTE SIMBOLOGÍA Y/O SISTEMA DE UNIDADES, PARA FACILITAR LA APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS, O PARA CONCILIAR EN LO POSIBLE DISCREPANCIAS ENTRE LAS DIVERSAS FUENTES CONSULTADAS.

NO SE DA NINGUNA GARANTÍA, EXPLÍCITA O IMPLÍCITA, SOBRE LA EXACTITUD DE LA INFORMACIÓN CONTENIDA EN ESTE DOCUMENTO, POR LO QUE NO SE RECOMIENDA SU USO EN LA PREPARACIÓN DE DISEÑOS FINALES DE EQUIPOS INDUSTRIALES, PROCESOS QUÍMICOS, O SISTEMAS DE VIAJE A TRAVÉS DEL TIEMPO. EN ESTOS CASOS, SE RECOMIENDA CONSULTAR LAS FUENTES BIBLIOGRÁFICAS ORIGINALES.

# Algunas Correlaciones para Convección Forzada en Flujo Externo

Adaptado principalmente de Incropera y DeWitt (2006), Çengel y Ghajar (2011), Levenspiel (1993) y Perry (2004).

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES ( $0.5 < Pr < 50$ excepto si se indica otro intervalo)																	
superficie plana, flujo paralelo	$Nu_x = 0.332Re_x^{1/2}Pr^{1/3}$ (local) $\bar{Nu}_L = 0.664Re_L^{1/2}Pr^{1/3}$ (promedio)	capa laminar, $Re_x < 5 \times 10^5$ ; espesor de capas límite: hidrodinámica $\delta = 5xRe_x^{-1/2}$ , térmica $\delta_T = \delta Pr^{-1/3}$																	
	$Nu_x = 0.565Pe_x^{1/2}$ (local)	capa laminar, metal líquido, $Pe_x > 100$ , $Pr < 0.05$																	
	$Nu_x = 0.0296Re_x^{4/5}Pr^{1/3}$ (local)	capa turbulenta, $5 \times 10^5 < Re_x < 10^8$ ; espesor de la capa límite $\delta = 0.37xRe_x^{-1/5}$ (hidrodinámica y térmica)																	
	$\bar{Nu}_L = (0.037Re_L^{4/5} - 871)Pr^{1/3}$	capa laminar y turbulenta, $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$																	
	$Nu_x = \frac{0.3387Re_x^{1/2}Pr^{1/3}}{[1 + (0.0468 / Pr)^{2/3}]^{1/4}}$ (local)	$Pe_x > 100$ , cualquier valor de $Pr$																	
	$Nu_x = 0.453Re_x^{1/2}Pr^{1/3}$ (local)	capa laminar, flujo de calor en pared $q_w$ uniforme, $Re_x < 5 \times 10^5$																	
	$Nu_x = 0.0308Re_x^{4/5}Pr^{1/3}$ (local)	capa turbulenta, flujo de calor en pared $q_w$ uniforme, $5 \times 10^5 < Re_x < 10^7$																	
superficie plana, flujo perpendicular	$\bar{Nu}_W = 0.228Re_W^{0.731}Pr^{1/3}$	$4000 < Re_W < 15000$ , la longitud $L$ se asume mucho mayor que el ancho $W$																	
cilindro perpendicular al flujo (en flujo cruzado)	$\bar{Nu}_D = (0.473 + 0.528Re_D^{1/2})Pr^{1/3}$	$Re_D < 500$ , $Pr > 0.5$																	
	$\bar{Nu}_D = (0.506Re_D^{1/2} + 0.00141Re_D)Pr^{1/3}$	$Re_D > 500$ , $Pr > 0.5$																	
	$\bar{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{1/3}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th><math>Re_D</math></th> <th><math>C</math></th> <th><math>m</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.4 - 4</td> <td>0.989</td> <td>0.330</td> </tr> <tr> <td>4 - 40</td> <td>0.911</td> <td>0.385</td> </tr> <tr> <td>40 - 4,000</td> <td>0.683</td> <td>0.466</td> </tr> <tr> <td>4,000 - 40,000</td> <td>0.193</td> <td>0.618</td> </tr> <tr> <td>40,000 - 400,000</td> <td>0.027</td> <td>0.805</td> </tr> </tbody> </table>	$Re_D$	$C$	$m$	0.4 - 4	0.989	0.330	4 - 40	0.911	0.385	40 - 4,000	0.683	0.466	4,000 - 40,000	0.193	0.618	40,000 - 400,000	0.027	0.805
$Re_D$	$C$	$m$																	
0.4 - 4	0.989	0.330																	
4 - 40	0.911	0.385																	
40 - 4,000	0.683	0.466																	
4,000 - 40,000	0.193	0.618																	
40,000 - 400,000	0.027	0.805																	
esfera	$\bar{Nu}_D = (2.2 + 0.48Re_D^{1/2})Pr$	sólo para gases, $1 < Re_D < 25$																	
	$\bar{Nu}_D = 0.37Re_D^{0.6}Pr^{1/3}$	sólo para gases, $20 < Re_D < 1.5 \times 10^5$																	
	$\bar{Nu}_D = 2 + 0.6Re_D^{1/2}Pr^{1/3}$	$1 < Re_D < 7 \times 10^4$																	
	$\bar{Nu}_D = 2 + (0.4Re_D^{1/2} + 0.06Re_D^{2/3})Pr^{0.4} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{1/4}$	todas las propiedades evaluadas @ $T_\infty$ , excepto $\mu_w$ que es evaluada @ $T_w$ , $3.5 < Re_D < 8 \times 10^4$ , $0.7 < Pr < 380$ , $1 < (\mu / \mu_w) < 3.2$																	

$$Nu_\ell = \frac{h\ell}{k} \quad Re_\ell = \frac{\rho v \ell}{\mu} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad Pe = Re \cdot Pr$$

- Todos los números de Nusselt son globales (promedio) excepto donde se indica que son locales.
- Excepto si se indica otra cosa, todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura promedio de película  $T_f = (T_w + T_\infty) / 2$ .
- Las correlaciones de esta tabla aplican para temperatura  $T_w$  uniforme, excepto las que se indican para flujo de calor  $q_w$  uniforme.
- Cuando se aplica la analogía de transferencia de calor y masa, las correlaciones correspondiente a transferencia de masa se obtienen haciendo el cambio  $Nu \rightarrow Sh$  y  $Pr \rightarrow Sc$ .

# Algunas Correlaciones para Convección Forzada en Flujo Interno

Adaptado principalmente de Incropera y DeWitt (2006), Çengel y Ghajar (2011), Levenspiel (1993) y Perry (2004).

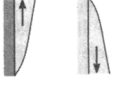
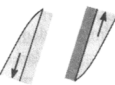

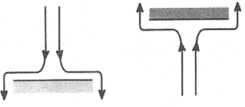


GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	CONDICIONES
flujo dentro de tubería circular	$Nu_D = 3.66$ (local)	laminar, completamente desarrollado, $T_w$ uniforme, $Re_D < 2100$ , $Pr > 0.5$
	$Nu_D = 4.36$ (local)	laminar, completamente desarrollado, $q_w$ uniforme, $Re_D < 2100$ , $Pr > 0.5$
	$\overline{Nu}_D = 1.86 \left( \frac{Pe_D}{L/D} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	laminar, longitud de entrada combinada, $T_w$ uniforme, $0.5 < 0.5 < Pr < 16700$ , $0.0044 < (\mu / \mu_w) < 9.75$
	$\overline{Nu}_D = 3.66 + \frac{0.0668(D/L)Pe_D}{1 + 0.04[(D/L)Pe_D]^{2/3}}$	laminar, longitud de entrada térmica ( $Pr \gg 1$ o una longitud inicial no calentada), $T_w$ uniforme
	$\overline{Nu}_D = 0.116(Re_D^{2/3} - 125)Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{2/3} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	régimen de transición, $2100 < Re_D < 10^4$
	$\overline{Nu}_D = 0.023Re_D^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	turbulento, $Re_D > 10^4$ , $0.5 < Pr < 700$
	$Nu_D = 5.0 + 0.025Pe_D^{0.8}$ (local)	metales líquidos, turbulento, completamente desarrollado, $T_w$ uniforme, $100 < Pe_D < 10000$
	$Nu_D = 4.82 + 0.0185Pe_D^{0.827}$ (local)	metales líquidos, turbulento, completamente desarrollado, $q_w$ uniforme, $100 < Pe_D < 10000$
	$h = \frac{3.52v^{0.8}}{D^{0.2}}$	turbulento, aproximado para aire (1 atm), $h$ [W/m <sup>2</sup> ·K], $v$ [m/s], $D$ [m]
	$h = (1429 + 21.14T) \frac{v^{0.8}}{D^{0.2}}$	turbulento, aproximado para agua (5 °C – 104 °C), $h$ [W/m <sup>2</sup> ·K], $T$ [°C], $v$ [m/s], $D$ [m]
flujo dentro de tubería con sección transversal rectangular $a \times b$	$\overline{Nu}_{D_h} = 0.0175Re_{D_h}^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	turbulento, $Re_{D_h} > 10^4$ , $0.6 < Pr < 700$ diámetro hidráulico $D_h = 2ab / (a + b)$
flujo en el espacio anular entre dos tuberías concéntricas $D_e$ = diámetro externo $D_i$ = diámetro interno	a la pared externa: $\overline{Nu}_{D_h} = 0.023Re_{D_h}^{0.8}Pr^{1/3} \left[ 1 + \left( \frac{D_h}{L} \right)^{0.7} \right] \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$ a la pared interna: $\overline{Nu}_{D_h} = 0.02Re_{D_h}^{0.8}Pr^{1/3} \left( \frac{D_e}{D_i} \right)^{0.53}$	turbulento, $Re_{D_h} > 10^4$ , $0.6 < Pr < 700$ diámetro hidráulico $D_h = D_e - D_i$
flujo dentro de serpentín $D_s$ = diámetro serpentín	$\overline{Nu}_{D_h} = 0.116(Re_D^{2/3} - 125)Pr^{1/3} \left( 1 + 3.5 \frac{D}{D_s} \right) \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.14}$	turbulento, $Re_{D_h} > 10^4$ , $0.6 < Pr < 700$

$$Nu_\ell = \frac{h\ell}{k} \quad Re_\ell = \frac{\rho v \ell}{\mu} \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad Pe = Re \cdot Pr$$

- Excepto donde se indica, las correlaciones son para Nusselt global (promedio), y las propiedades del fluido se evalúan con el promedio de las temperaturas medias de entrada y salida del fluido,  $\bar{T}_m = (T_{m, entrada} + T_{m, salida}) / 2$ . Donde se indica que la correlación es local, las propiedades se evalúan a la temperatura media  $T_m$  del fluido en ese punto.  $\mu_w$  es la viscosidad evaluada a la temperatura de la pared.
- Para flujo laminar en una tubería, la longitud de entrada hidrodinámica está dada por  $L_e / D \approx 0.06Re_D$ , y la longitud de entrada térmica por  $L_{e,T} / D \approx 0.06Re_D Pr^{1/3}$ . Para flujo turbulento, ambas longitudes de entrada son aproximadamente iguales,  $L_e / D \approx 4.4Re_D^{1/6}$ .
- Cuando se aplica la analogía de transferencia de calor y masa, las correlaciones correspondiente a transferencia de masa se obtienen haciendo el cambio  $Nu \rightarrow Sh$  y  $Pr \rightarrow Sc$ .

# Algunas Correlaciones para Convección Libre

Adaptado principalmente de Incropera y DeWitt (2006).

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	LONGITUD CARACTERÍSTICA
<p><b>superficie plana vertical</b> superficie caliente o fría</p> 	$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387Ra_L^{1/6}}{\left[ 1 + (0.492 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$ <p>(para cualquier valor de <math>Ra_L</math>)</p> <p>también aplica para <b>cilindros verticales</b> si <math>D &gt; \frac{35L}{Gr_L^{1/4}}</math></p>	<p>distancia <math>L</math> sobre la superficie en la dirección del movimiento del fluido</p>
<p><b>superficie plana inclinada</b> por arriba de una superficie fría o por debajo de una superficie caliente</p> 	<p>misma ecuación que para superficies planas verticales, pero usando <math>g \cos \theta</math> en lugar de <math>g</math> al calcular <math>Gr</math> (para un ángulo <math>\theta</math> entre 0 y 60° respecto a la vertical)</p>	<p>distancia <math>L</math> sobre la superficie en la dirección del movimiento del fluido</p>
<p><b>superficie plana horizontal</b> por debajo de una superficie fría o por arriba de una superficie caliente</p> 	$\overline{Nu}_L = 0.54Ra_L^{1/4} \quad (10^4 < Ra_L < 10^7)$ $\overline{Nu}_L = 0.15Ra_L^{1/3} \quad (10^7 < Ra_L < 10^{11})$	$L = \frac{\text{área}}{\text{perímetro}}$
<p><b>superficie plana horizontal</b> por arriba de una superficie fría o por debajo de una superficie caliente</p> 	$\overline{Nu}_L = 0.27Ra_L^{1/4} \quad (10^5 < Ra_L < 10^{10})$	$L = \frac{\text{área}}{\text{perímetro}}$
<p><b>cilindro horizontal</b></p> 	$\overline{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387Ra_D^{1/6}}{\left[ 1 + (0.559 / Pr)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad (Ra_D < 10^{12})$	<p>diámetro <math>D</math></p>
<p><b>esfera</b></p> 	$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589Ra_D^{1/4}}{\left[ 1 + (0.469 / Pr)^{9/16} \right]^{4/9}} \quad (Ra_D < 10^{11})$	<p>diámetro <math>D</math></p>

$$Nu_\ell = \frac{h\ell}{k}$$

$$Gr_\ell = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|\ell^3}{\nu^2}$$

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

- Todos los números de Nusselt son globales (promedio).
- Todas las propiedades del fluido se evalúan a la temperatura promedio de película  $T_f = (T_w + T_\infty) / 2$ .
- Las correlaciones de esta tabla aplican para temperatura  $T_w$  uniforme.

# ECUACIONES DE TRANSFERENCIA DE MASA POR CONVECCIÓN

Adaptado principalmente de Welty, Wicks y Wilson, "Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa", Limusa.

FASE GASEOSA			
Fuerza impulsora	Densidad de flujo molar de A		Unidades del coeficiente de transferencia de masa
	DUM	CDEM	
Diferencia de presión parcial ( $\Delta P_A$ )	$n_A = k_G \Delta P_A$	$n_A = k_G^0 \Delta P_A$	$\frac{\text{moles transferidos de A}}{(\text{presión})(\text{área})(\text{tiempo})}$
Diferencia de concentración ( $\Delta C_A$ )	$n_A = k_C \Delta C_A$	$n_A = k_C^0 \Delta C_A$	$\frac{\text{moles transferidos de A}}{(\text{moles de A/volumen})(\text{área})(\text{tiempo})}$
Diferencia de fracción mol ( $\Delta y_A$ )	$n_A = k_y \Delta y_A$	$n_A = k_y^0 \Delta y_A$	$\frac{\text{moles transferidos de A}}{(\text{moles de A/moles totales})(\text{área})(\text{tiempo})}$
<b>Conversiones entre coeficientes de transferencia de masa para la fase gaseosa</b> $k_y^0 = k_G^0 P = k_C^0 \frac{P}{RT} = k_y \frac{P_{B,ml}}{P} = k_G P_{B,ml} = k_C \frac{P_{B,ml}}{RT}$			
Media logarítmica de la presión parcial del acarreador (para cualquier concentración):			$P_{B,ml} = \frac{P_{B,G} - P_{B,i}}{\ln(P_{B,G} / P_{B,i})}$
Para presiones parciales de A pequeñas (para sistema diluido):			$P_{B,ml} \approx \frac{P_{B,G} + P_{B,i}}{2}$
Para presiones parciales de A muy pequeñas (para sistema muy diluido):			$P_{B,ml} \approx P$

FASE LÍQUIDA			
Fuerza impulsora	Densidad de flujo molar de A		Unidades del coeficiente de transferencia de masa
	DUM	CDEM	
Diferencia de concentración ( $\Delta C_A$ )	$n_A = k_L \Delta C_A$	$n_A = k_L^0 \Delta C_A$	$\frac{\text{moles transferidos de A}}{(\text{moles de A/volumen})(\text{área})(\text{tiempo})}$
Diferencia de fracción mol ( $\Delta x_A$ )	$n_A = k_x \Delta x_A$	$n_A = k_x^0 \Delta x_A$	$\frac{\text{moles transferidos de A}}{(\text{moles de A/moles totales})(\text{área})(\text{tiempo})}$
<b>Conversiones entre coeficientes de transferencia de masa para la fase líquida</b> $k_x^0 = k_L^0 C = k_x x_{B,ml} = k_L x_{B,ml} C$			
Media logarítmica de la fracción mol del solvente (para cualquier concentración):			$x_{B,ml} = \frac{x_{B,L} - x_{B,i}}{\ln(x_{B,L} / x_{B,i})}$
Para fracciones mol de A pequeñas (para sistema diluido):			$x_{B,ml} \approx \frac{x_{B,L} + x_{B,i}}{2}$
Para fracciones mol de A muy pequeñas (para sistema muy diluido):			$x_{B,ml} \approx 1$

**NOTACIÓN:** A y B son los componentes del sistema binario o pseudo-binario, donde A es el componente de interés y B es el acarreador o solvente (según el tipo de fase). Los subíndices G y L se refieren a la fase gaseosa y líquida, respectivamente, y el subíndice i se refiere a la interfase donde está ocurriendo la transferencia de masa por convección. En sistemas binarios  $P_A + P_B = P$  y  $x_A + x_B = 1$ . El superíndice 0 se usa para indicar contradifusión equimolar, ya que en este caso la velocidad promedio molar es cero. Las diferencias de presión parcial, concentración o fracción mol se toman entre la interfase y el fluido lejos de la interfase.

# Algunas Correlaciones para Transferencia de Masa por Convección

## INTERFASES FLUIDO-SÓLIDO

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	NOTAS
membrana	$\frac{k\delta}{\mathcal{D}_{AB}} = 1$	Aplicada incluso si la membrana es hipotética. $\delta$ = espesor de la membrana.
flujo laminar paralelo a una superficie plana	$Sh_L = 0.646Re_L^{1/2}Sc^{1/3}$	Deducida teóricamente, coeficiente promedio para toda la superficie. $Re_L = \rho v_\infty L / \mu$ . $L$ = longitud de la superficie. $v_\infty$ = velocidad del fluido lejos de la superficie.
flujo laminar en una tubería circular	$Sh_D = 1.62 \left( \frac{D^2 v}{\mathcal{D}_{AB} L} \right)^{1/3}$	Con base teórica verificada experimentalmente. $D$ = diámetro interno de la tubería. $L$ = longitud de la tubería. $v$ = velocidad promedio del fluido. $Re < 2100$ .
flujo turbulento en una tubería circular	$Sh_D = 0.026Re_D^{0.8}Sc^{1/3}$	$Re_D = \rho v D / \mu$ . $D$ = diámetro interno de la tubería. $v$ = velocidad promedio del fluido. $Re > 4000$ .
flujo turbulento en ranura entre dos superficies planas paralelas	$Sh_{D_H} = 0.026Re_{D_H}^{0.8}Sc^{1/3}$	Igual que en tubería, usando diámetro hidráulico de la ranura, $D_H = 2W / \pi$ . $Re_{D_H} = \rho v D_H / \mu$ . $Re > 4000$ . $v$ = velocidad promedio del fluido. $W$ = ancho de ranura.
convección forzada alrededor de una esfera sólida	$Sh_D = 2 + 0.6Re_D^{1/2}Sc^{1/3}$	$Re_D > 0.01$ . No hay una transición brusca entre flujo laminar y flujo turbulento.
convección libre alrededor de una esfera sólida	$Sh_D = 2 + 0.6 \left( \frac{\rho g \Delta \rho D^3}{\mu^2} \right)^{1/4} Sc^{1/3}$	$\Delta \rho$ = diferencia de densidad en la capa límite en el fluido (entre la interfase y el fluido lejos de la esfera). Como referencia, para una esfera de $D = 1$ cm en agua, la convección libre es significativa si $\Delta \rho \geq 10^{-6}$ kg/m <sup>3</sup> .
disco en rotación	$Sh_D = 0.62Re_\omega^{1/2}Sc^{1/3}$	Para $100 < Re_\omega < 20000$ , donde $Re_\omega = \rho \omega D^2 / \mu$ es el número de Reynolds con base en la velocidad angular $\omega$ (en rad/s).
lecho empacado	$\frac{k}{v_0} = 1.17Re^{-0.42}Sc^{-2/3}$	$Re = \rho v_0 d_p / \mu$ es el número de Reynolds con base en la velocidad superficial y el diámetro de partícula. $v_0$ = velocidad superficial (la velocidad que tendría el fluido si no existiera el empaque).
flujo perpendicular externo a un lecho de tubos capilares	$Sh_D = 0.80Re_D^{0.47}Sc^{1/3}$	Confiable si los capilares están espaciados de manera uniforme. $D$ = diámetro del capilar. $Re_D = \rho v_\infty D / \mu$ . $v_\infty$ = velocidad del fluido al aproximarse al lecho.

Adaptado de Cussler (1997). "Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems", 2nd Edition, Cambridge University Press.

- Los coeficientes de transferencia de masa obtenidos con estas correlaciones aplican para sistemas en contradifusión equimolar o para sistemas diluidos.
- Las propiedades del fluido se evalúan a las condiciones promedio (entre la interfase y el resto del fluido). Para sistemas diluidos, puede usarse las propiedades del solvente.
- $D$  = diámetro.  $\mathcal{D}_{AB}$  = coeficiente de difusión.  $g$  = gravedad.  $k$  = coeficiente de transferencia de masa.  $v$  = velocidad del fluido.  $\mu$  = viscosidad del fluido.  $\rho$  = densidad del fluido.
- Excepto donde se indica, el subíndice en un grupo adimensional indica la longitud característica  $\ell$ . Los grupos básicos son:

$$\text{número de Sherwood: } Sh_\ell = \frac{k\ell}{\mathcal{D}_{AB}} \quad \text{número de Reynolds: } Re_\ell = \frac{\rho v \ell}{\mu} \quad \text{número de Schmidt: } Sc = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}_{AB}}$$

# Algunas Correlaciones para Transferencia de Masa por Convección

## INTERFASES FLUIDO-FLUIDO

GEOMETRÍA	CORRELACIÓN	NOTAS
película descendente	$Sh_z = 0.69 \left( \frac{zv}{D_{AB}} \right)^{0.5}$	Para coeficiente local de transferencia de masa. $z$ = posición a lo largo de la película, medida desde la parte superior. $v$ = velocidad promedio del fluido.
burbujas de gas puro ascendiendo en un líquido no agitado	$Sh_d = 0.31 \left( \frac{\rho g \Delta \rho d^3}{\mu^2} \right)^{1/3} Sc^{1/3}$	Para burbujas individuales o grupos pequeños de burbujas. $d$ = diámetro de la burbuja. $\Delta \rho$ = diferencia de densidad entre el líquido y el gas.
burbujas de gas puro en un tanque agitado	$\frac{k}{D_{AB}} = 0.13 \left( \frac{(\dot{W}/V)\rho^2}{\mu^3} \right)^{1/4} Sc^{1/3}$	$k$ no depende del diámetro de burbuja. $(\dot{W}/V)$ es la potencia de agitación por unidad de volumen ( $W/m^3$ ). $\rho$ = densidad del líquido. $\mu$ = viscosidad del líquido.
gotas pequeñas de líquido en un líquido inmiscible no agitado	$Sh_d = 1.13 \left( \frac{dv_\infty}{D_{AB}} \right)^{0.8}$	Las gotas pequeñas se comportan como esferas rígidas. $d$ = diámetro de la gota. $v_\infty$ = velocidad terminal de la gota.
gotas grandes de líquido en un líquido inmiscible no agitado	$Sh_d = 0.42 \left( \frac{\rho g  \Delta \rho  d^3}{\mu^2} \right)^{1/3} Sc^{1/2}$	Gotas de 3 mm de diámetro o mayores. $d$ = diámetro de la gota. $\Delta \rho$ = diferencia de densidad entre ambas fases. $\mu$ = viscosidad de la fase continua.
líquido en una columna empacada	$k \left( \frac{\rho}{\mu g} \right)^{1/3} = 0.0051 \left( \frac{\rho v_0}{a \mu} \right)^{0.67} (ad)^{0.4} Sc^{-0.5}$	Correlación muy confiable para líquidos, suele dar valores más bajos que otras. $d$ = tamaño nominal del empaque. $a$ = área de empaque por unidad de volumen de columna ( $m^2/m^3$ ). $v_0$ = velocidad superficial del líquido.
	$Sh_d = 25 Re_d^{0.45} Sc^{0.5}$	Correlación clásica muy citada, tal vez menos confiable que la anterior. $Re = \rho v_0 d / \mu$ . $d$ = tamaño nominal del empaque. $v_0$ = velocidad superficial del líquido.
gas en una columna empacada	$\frac{k}{a D_{AB}} = 3.6 \left( \frac{\rho v_0}{a \mu} \right)^{0.70} (ad)^{-2} Sc^{1/3}$	Muy buena correlación para gases. $d$ = tamaño nominal del empaque. $a$ = área de empaque por unidad de volumen de columna ( $m^2/m^3$ ). $v_0$ = velocidad superficial del gas.
	$Sh_d = 1.2(1 - \varepsilon)^{0.36} Re_d^{0.64} Sc^{1/3}$	Correlación clásica muy citada. $Re = \rho v_0 d / \mu$ . $\varepsilon$ = fracción hueca del empaque. $d$ = tamaño nominal del empaque. $v_0$ = velocidad superficial del gas.

Adaptado de Cussler (1997), "Diffusion: Mass Transfer in Fluid Systems", 2nd Edition, Cambridge University Press.

- Los coeficientes de transferencia de masa obtenidos con estas correlaciones aplican para sistemas en contradifusión equimolar o para sistemas diluidos.
- Las propiedades del fluido se evalúan a las condiciones promedio (entre la interfase y el resto del fluido). Para sistemas diluidos, puede usarse las propiedades del solvente.
- $D$  = diámetro.  $D_{AB}$  = coeficiente de difusión.  $g$  = gravedad.  $k$  = coeficiente de transferencia de masa.  $v$  = velocidad del fluido.  $\mu$  = viscosidad del fluido.  $\rho$  = densidad del fluido.
- Excepto donde se indica, el subíndice en un grupo adimensional indica la longitud característica. Los grupos básicos son:

$$\text{número de Sherwood: } Sh_\ell = \frac{k\ell}{D_{AB}} \quad \text{número de Reynolds: } Re_\ell = \frac{\rho v \ell}{\mu} \quad \text{número de Schmidt: } Sc = \frac{\mu}{\rho D_{AB}}$$