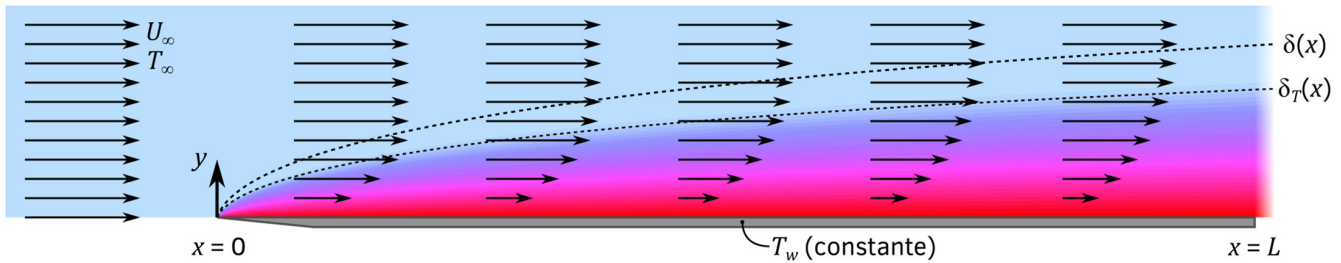


# ANÁLISIS DE LA CAPA LÍMITE TÉRMICA

FLUJO LAMINAR PARALELO A UNA SUPERFICIE PLANA ISOTÉRMICA



## Suposiciones

- ★ Estado estable.
- ★ Es una placa plana de una longitud  $L$  en la dirección  $x$  y de infinita extensión en la dirección  $z$ , que se mantiene a una temperatura constante  $T_w$  (isotérmica).
- ★ El fluido llega en flujo laminar en dirección paralela a la superficie, con velocidad  $U_\infty$  y temperatura  $T_\infty$  uniformes.
- ★ La velocidad y la temperatura varían en las direcciones  $x$  y  $y$ , pero no varían en la dirección  $z$ .
- ★ Los efectos de la gravedad son despreciables; no hay gradientes de presión, generación de calor o disipación viscosa.
- ★ Es un fluido newtoniano de propiedades constantes ( $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c_p$  y  $k$ ).

## Números de Reynolds y Nusselt, local y global

Las condiciones del flujo y de la transferencia de calor cambian de un punto a otro a lo largo de la superficie, por lo que se puede definir un número de Reynolds y un número de Nusselt “locales” que usen la posición  $x$  como longitud característica, y los correspondientes números “globales” con base en la longitud total  $L$  de la placa:

$$\text{Re}_x \equiv \frac{\rho U_\infty x}{\mu} \quad \text{Nu}_x \equiv \frac{hx}{k} \quad \text{(local)} \quad \text{Re}_L \equiv \frac{\rho U_\infty L}{\mu} \quad \text{Nu}_L \equiv \frac{hL}{k} \quad \text{(global)}$$

Se ha comprobado experimentalmente que la capa límite mantiene un flujo laminar hasta  $\text{Re}_x \approx 5 \times 10^5$ .

## Simplificación de las ecuaciones de conservación

El punto de partida para este análisis son las ecuaciones de conservación de masa (ecuación de continuidad), de conservación de momentum (Navier-Stokes) y de conservación de la energía térmica en coordenadas rectangulares:

conservación de masa	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
conservación de momentum (componente $x$ )	$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x = 0$
conservación de momentum (componente $y$ )	$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g_y = 0$
conservación de momentum (componente $z$ )	$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z = 0$
conservación de la energía térmica	$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \mu \Phi_v - \dot{G} = 0$

### NOTACIÓN SIMPLIFICADA

Para evitar el uso excesivo de subíndices, de aquí en adelante los componentes de la velocidad  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  se indican como  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

Las ecuaciones se simplifican inicialmente con base en las suposiciones, para llegar a:

conservación de masa	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
conservación de momentum (componente $x$ )	$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$
conservación de momentum (componente $y$ )	$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$
conservación de la energía térmica	$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$

### Hipótesis de la capa límite de Prandtl

“Los efectos de la viscosidad están confinados a una capa muy delgada (de espesor  $\delta$ ) de fluido adyacente a la superficie”

$$\delta \ll L \quad \text{o bien} \quad \frac{\delta}{L} \ll 1$$

### Análisis de escala

La hipótesis de la capa límite permite descartar algunos términos adicionales con base en su orden de magnitud relativo. Para ello, es necesario identificar el orden de magnitud de cada término. Por ejemplo, la notación  $u \sim U_\infty$  significa que la velocidad en la dirección  $x$  puede tomar valores aproximadamente en un intervalo de 0 a  $U_\infty$ . Los órdenes de las principales variables en las ecuaciones son:

$$u \sim U_\infty \quad x \sim L \quad y \sim \delta \quad T \sim |T_w - T_\infty| \quad (1)$$

Por ejemplo, en la ecuación de conservación de la energía aún quedan dos términos de conducción (las segundas derivadas de  $T$  respecto a  $x$  y respecto a  $y$ ). El análisis de escala permite responder a la pregunta: ¿son ambos términos igualmente importantes o se puede descartar uno de ellos por ser muy pequeño comparado con el otro? Para ello, primero se identifica la escala de cada término:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{|T_w - T_\infty|}{L^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \frac{|T_w - T_\infty|}{\delta^2}$$

y luego se divide uno entre otro para establecer su importancia relativa:

$$\frac{\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)}{\left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)} \sim \frac{\left( \frac{|T_w - T_\infty|}{L^2} \right)}{\left( \frac{|T_w - T_\infty|}{\delta^2} \right)} = \frac{\delta^2}{L^2} = \left( \frac{\delta}{L} \right)^2$$

Como  $\frac{\delta}{L} \ll 1$  por la hipótesis de Prandtl, entonces  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  y se llega a la conclusión de que puede descartarse  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

Aplicando el análisis de escala comparando los diferentes términos de las ecuaciones, éstas se pueden reducir a:

conservación de masa	$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
conservación de momentum, componente $x$	$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
conservación de energía	$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

donde la ecuación para el componente  $y$  del momentum se puede descartar por completo. Las tres ecuaciones que quedan forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas (porque los componentes de la velocidad  $u$  y  $v$  aparecen en las tres ecuaciones) con tres incógnitas, que deben ser resueltas de forma simultánea.

Las condiciones de frontera aplicables en este caso son:

$u = 0$	$v = 0$	$T = T_w$	para $y = 0$ y $x \geq 0$
$u = U_\infty$	$v = 0$	$T = T_\infty$	para $y \rightarrow \infty$

### Perfil de temperatura

Comparando los perfiles de temperatura (y de velocidad) en diferentes puntos a lo largo de la placa se observa que son **auto-similares**. Esto permite aplicar el método de combinación de variables. Se define una variable combinada  $\eta$ :

$$\eta = y \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \quad (2)$$

A esta variable también se le llama “variable elástica”, porque es la variable  $y$  que se ha “estirado” de acuerdo a un factor proporcional a  $x^{-1/2}$ . Se define también la temperatura adimensional  $\Theta$ :

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (3)$$

A continuación se asume que existe una función de corriente  $\psi$ , a partir de la cual se podrían calcular los componentes de la velocidad como derivadas parciales:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad y \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4)$$

Al asumir esta función de corriente, la ecuación de continuidad queda automáticamente satisfecha por lo que ya no se necesita. También se asume que dicha función de corriente puede ser expresada como  $\psi = f(\eta) \sqrt{2\mu U_\infty x} / \rho$  donde  $f(\eta)$  es una función aún por ser determinada.

Aplicando las definiciones anteriores y algo de álgebra, la ecuación de conservación de momentum en la dirección  $x$  y la ecuación de conservación de la energía térmica se convierten en:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad f''' + ff'' = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \text{Pr} f \frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Theta'' + \text{Pr} f \Theta' = 0 \quad (6)$$

con condiciones de frontera

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(\infty) = 1 \quad \Theta(0) = 0 \quad \Theta(\infty) = 1 \quad (7)$$

Las ecuaciones obtenidas forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales (de tercer y segundo orden, respectivamente) que no pueden ser resueltas analíticamente. Por esta razón, es necesario recurrir a una solución numérica. Para ello, las dos ecuaciones diferenciales se convierten a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se comienza identificando  $f$  con  $y_1$  y  $\Theta$  con  $y_4$ , y derivando hasta alcanzar la derivada más alta en cada una de las ecuaciones. El sistema resultante es:

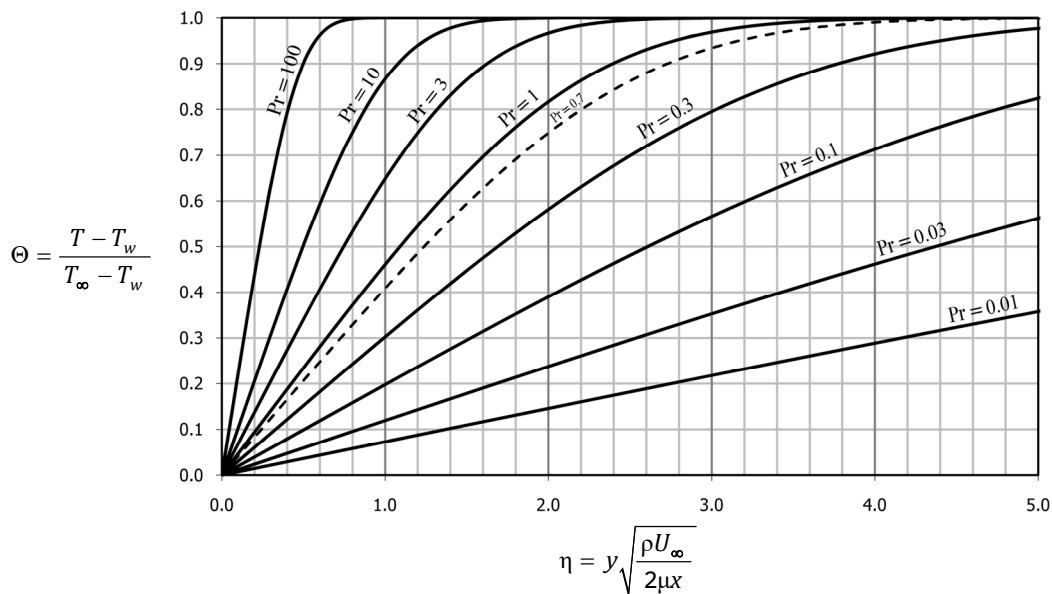
$$y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = -y_1 y_3 \quad y_4' = y_5 \quad y_5' = -Pr y_1 y_5 \quad (8)$$

con condiciones de frontera:

$$y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0 \quad y_2(\infty) = 1 \quad y_4(0) = 0 \quad y_4(\infty) = 1 \quad (9)$$

Este sistema se puede resolver utilizando algún método numérico (por ejemplo, el método de Runge-Kutta de cuarto orden). Ya que no se tiene valor inicial para  $y_3$  y  $y_5$ , se usa el método de disparo: se intentan diferentes valores de  $y_3(0)$  y  $y_5(0)$  hasta que, al resolver el sistema,  $y_2$  y  $y_4$  sean 1 para valores muy grandes de  $\eta$ .

Ya que el número de Prandtl  $Pr$  es un parámetro en la ecuación para  $y_5'$ , se van a obtener soluciones diferentes para diferentes valores de  $Pr$ . Estas soluciones se pueden representar en forma gráfica:



### Espesor de la capa límite térmica

La capa límite térmica es la región donde la temperatura varía, desde la temperatura de la superficie ( $T_w$ ) hasta la temperatura del fluido muy lejos de la superficie ( $T_\infty$ ). Sin embargo, el cambio es gradual y no hay una posición exacta donde la temperatura sea  $T_\infty$ . Por convención, se establece que la capa límite termina donde se ha alcanzado el 99% de la variación de temperatura entre la superficie y el fluido.

Con este criterio, es posible mostrar que el espesor de la capa límite térmica  $\delta_T$  está relacionada con el espesor de la capa límite hidrodinámica  $\delta$  y el número de Prandtl:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx Pr^{-1/3} \quad (10)$$

donde  $\delta$  a su vez se relaciona con el número de Reynolds local y la distancia  $x$  :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (11)$$

### Coeficiente local de transferencia de calor

Para determinar el coeficiente de transferencia de calor, se plantea el hecho de que todo el calor que es transferido por convección a través de la capa límite térmica, tuvo que haber sido transferido por conducción desde la placa hacia las primeras capas del fluido (es decir, en  $y = 0$ ) Esto significa que se puede igualar la ley de Newton del enfriamiento con la ley de Fourier de la conducción:

$$h(T_w - T_\infty) = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (12)$$

ley de Newton del enfriamiento
ley de Fourier de la conducción

Ya que la solución de las ecuaciones diferenciales se tiene para  $\Theta$  en función de  $\eta$ , es necesario hacer el cambio de variables. Primero, se despeja  $T$  de la ecuación (3):

$$\Theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} \longrightarrow T = T_w + (T_\infty - T_w)\Theta \quad (13)$$

y se deriva con respecto a  $y$  :

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [T_w + (T_\infty - T_w)\Theta] \longrightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = (T_\infty - T_w) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (14)$$

Al sustituir en la ecuación (12), se ve que las temperaturas se cancelan, tomando en cuenta el signo negativo del lado derecho de la igualdad:

$$h(T_w - T_\infty) = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \longrightarrow h(T_w - T_\infty) = -k(T_\infty - T_w) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \longrightarrow h = k \frac{\partial \Theta}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (15)$$

Ahora, para cambiar la derivada con respecto a  $y$  a una derivada con respecto a  $\eta$ , se multiplica por  $\partial \eta / \partial \eta$  y se intercambian los diferenciales:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (16)$$

Como  $\Theta$  sólo es función de  $\eta$ , la derivada parcial  $\partial \Theta / \partial \eta$  no es más que la derivada ordinaria  $d\Theta / d\eta$ , que se puede escribir simplemente como  $\Theta'$ . Por otro lado, la derivada  $\partial \eta / \partial y$  se puede evaluar a partir de la definición de  $\eta$  (ecuación 2):

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \right) = \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \quad (17)$$

Por lo tanto, la ecuación (16) se vuelve:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \Theta' \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \quad (18)$$

En  $y = 0$ , se tiene que  $\eta = 0$ , por lo que  $\Theta'$  se vuelve  $\Theta'(0)$  (es decir,  $d\Theta / d\eta$  evaluada en  $\eta = 0$ ). Con esto, la ecuación (15) se vuelve:

$$h = k \left. \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right|_{y=0} \longrightarrow h = k\Theta'(0) \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \quad (19)$$

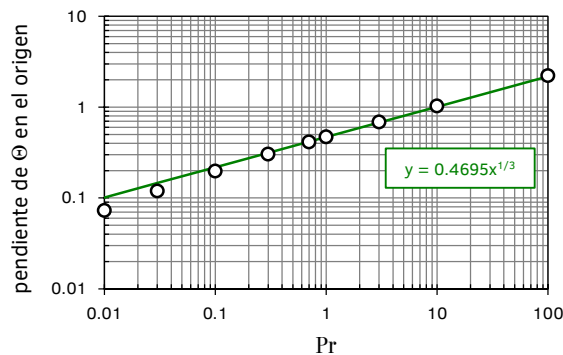
Para acomodarlo en forma adimensional, se pasa la conductividad térmica dividiendo al lado izquierdo y se multiplica ambos lados por  $x$ . En el lado derecho de la ecuación,  $x$  puede entrar a la raíz como  $x^2$  y simplificarse con la que está dividiendo:

$$\frac{h}{k} = \Theta'(0) \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \longrightarrow \frac{hx}{k} = \Theta'(0) x \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{2\mu x}} \longrightarrow \frac{hx}{k} = \Theta'(0) \sqrt{\frac{\rho U_\infty x}{2\mu}} \quad (20)$$

El lado izquierdo corresponde a la definición del número de Nusselt local  $Nu_x$ , y en el lado derecho es fácil identificar el número de Reynolds local  $Re_x$ , salvo por el 2 en el denominador. Sacando ese factor de  $\sqrt{2}$ , se llega a:

$$Nu_x = \frac{\Theta'(0)}{\sqrt{2}} Re_x^{1/2} \quad (21)$$

Finalmente,  $\Theta'(0)$  se puede evaluar a partir de la pendiente en el origen de las curvas de la figura de la página 4, en la que se puede apreciar que la pendiente cambia al variar el número de Prandtl. Graficando  $\Theta'(0)$  en función de  $Pr$  en una escala logarítmica, se observa que, excepto para valores muy pequeños de  $Pr$ , existe una clara relación lineal entre estas variables:



Mediante regresión por mínimos cuadrados, se encuentra que  $\Theta'(0) \approx 0.4695Pr^{1/3}$ . Sustituyendo esta relación en la ecuación (21) y simplificando se llega a la expresión final para el número de Nusselt (local) para este caso:

$$\boxed{Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}} \quad (22)$$

Esta ecuación es válida para  $Re_x < 5 \times 10^5$  (flujo laminar) y para  $0.3 < Pr < 100$ . Al ser local, este número de Nusselt (y por lo tanto el valor de  $h$ ) corresponden sólo a un punto en la superficie.

### Coefficiente promedio de transferencia de calor

Se obtiene integrando el número de Nusselt local sobre toda la longitud de la placa. Este número de Nusselt promedio involucra un coeficiente promedio de transferencia de calor  $\bar{h}$  que se puede emplear para representar la transferencia de calor promediada en toda la superficie.

$$\bar{Nu}_L = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_x dx \quad \therefore \quad \boxed{\bar{Nu}_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}} \quad (23)$$