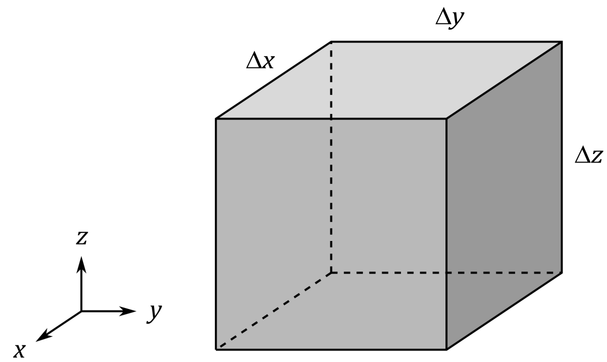
DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Adaptado principalmente de Bird (2002).

Considerar un volumen de control en coordenadas cartesianas, de dimensiones Δx por Δy por Δz, fijo en el espacio. Se busca realizar un balance de energía en este volumen de control, durante un intervalo de tiempo Δt.



1. Suposiciones

- ★ Estado transitorio.
- ★ Existe transporte de energía en las tres direcciones (x, y y z) debido a todos los mecanismos posibles, excepto por radiación.

2. Balance diferencial de energía

El balance de energía (**E – S + G = A**) se puede expresar como:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Entrada}\\ \text{de energía}\\ \text{al volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Salida}\\ \text{de energía}\\ \text{del volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Trabajo realizado}\\ \text{en contra de}\\ \text{la fuerza de}\\ \text{gravedad}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Generación de}\\ \text{energía dentro}\\ \text{del volumen}\\ \text{de control}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Acumulación de}\\ \text{energías interna y}\\ \text{cinética dentro del}\\ \text{volumen de control}\end{array}\right\} \tag{1}$$

Cada contribución se muestra más adelante. Las unidades de todos los términos deben ser **joules**.

2.1 *Entradas y salidas*

Las diferentes formas en las que la eneregía puede pasar a través de un determinado lugar en el espacio son:

Transporte de energía cinética por advección	$\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)\mathbf{v}$
Transporte de energía interna por advección	$\left(\rho\hat{U}\right)\mathbf{v}$
Densidad de flujo de calor por conducción	$\mathbf{q}$
Trabajo realizado sobre el fluido por las fuerzas viscosas	$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}$
Trabajo realizado sobre el fluido por las fuerzas de presión	$P\mathbf{v}$

Todos estos términos tienen las mismas unidades (J/m²·s), lo que permite agruparlos en un solo vector, denominado *densidad de flujo de energía* $\mathbf{e}$:

$$\mathbf{e} = \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\hat{U}\right)\mathbf{v} + \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v} + P\mathbf{v} \tag{2}$$

La energía potencial no se incluye aquí porque se trata como una generación en la ecuación del balance de energía.

	entrada	salida
Transporte de energía en la dirección x	$e_x\big\vert_x \Delta y\Delta z\Delta t$	$e_x\big\vert_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z\Delta t$
Transporte de energía en la dirección y	$e_y\big\vert_y \Delta x\Delta z\Delta t$	$e_y\big\vert_{y+\Delta y} \Delta x\Delta z\Delta t$
Transporte de energía en la dirección z	$e_z\big\vert_z \Delta x\Delta y\Delta t$	$e_z\big\vert_{z+\Delta z} \Delta x\Delta y\Delta t$

2.2 Generación de energía

En la generación de energía, se considera el trabajo realizado en contra de las fuerzas de gravedad (el cambio en la energía potencial dentro del volumen de control) y la rapidez de generación de calor debida a otras fuentes (electromagnética, química, nuclear, etcétera), representada de forma general como $\dot{G}$, dada en W/m³.

Trabajo contra las fuerzas de gravedad	$\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$
Generación de energía debido a otras fuentes	$\dot{G}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$

2.3 Acumulación de energía

Para la acumulación de energía en el volumen de control, se determina cuánta energía cinética y energía interna existen en el volumen de control, y se toma la diferencia de su valor final menos su valor inicial.

Acumulación de energía cinética (final –inicial)	$\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\Big\|_{t+\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z-\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\Big\|_{t}\Delta x\Delta y\Delta z$
Acumulación de energía interna (final –inicial)	$\left(\rho\hat{U}\right)\Big\|_{t+\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z-\left(\rho\hat{U}\right)\Big\|_{t}\Delta x\Delta y\Delta z$

2.4 Balance y ecuación de conservación

Reuniendo todos los términos en el balance se tiene:

$$e_x\Big|_x\Delta y\Delta z\Delta t+e_y\Big|_y\Delta x\Delta z\Delta t+e_z\Big|_z\Delta x\Delta y\Delta t-e_x\Big|_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z\Delta t-e_y\Big|_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z\Delta t-e_z\Big|_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y\Delta t+\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$
$$+\dot{G}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t=\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\Big|_{t+\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z-\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\Big|_{t}\Delta x\Delta y\Delta z+\left(\rho\hat{U}\right)\Big|_{t+\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z-\left(\rho\hat{U}\right)\Big|_{t}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{3}$$

Dividiendo entre $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$ y agrupando términos:

$$\frac{e_x\big|_x-e_x\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x}+\frac{e_y\big|_y-e_y\big|_{y+\Delta y}}{\Delta y}+\frac{e_z\big|_z-e_z\big|_{z+\Delta z}}{\Delta z}+\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})+\dot{G}=\frac{\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\big|_{t+\Delta t}-\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\big|_{t}}{\Delta t}+\frac{\left(\rho\hat{U}\right)\big|_{t+\Delta t}-\left(\rho\hat{U}\right)\big|_{t}}{\Delta t} \tag{4}$$

Comparando con la definición de la primera derivada, $\frac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ se ve que es necesario introducir un cambio de signo en los primeros términos:

$$-\frac{e_x\big|_{x+\Delta x}-e_x\big|_x}{\Delta x}-\frac{e_y\big|_{y+\Delta y}-e_y\big|_y}{\Delta y}-\frac{e_z\big|_{z+\Delta z}-e_z\big|_z}{\Delta z}+\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})+\dot{G}=\frac{\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\big|_{t+\Delta t}-\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\big|_{t}}{\Delta t}+\frac{\left(\rho\hat{U}\right)\big|_{t+\Delta t}-\left(\rho\hat{U}\right)\big|_{t}}{\Delta t} \tag{5}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ y $\Delta t\to 0$ se llega a:

$$-\frac{\partial e_x}{\partial x}-\frac{\partial e_y}{\partial y}-\frac{\partial e_z}{\partial z}+\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})+\dot{G}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right) \tag{6}$$

Reacomodando la ecuación igualándola a cero, para expresarla como una ecuación de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\frac{\partial e_x}{\partial x}+\frac{\partial e_y}{\partial y}+\frac{\partial e_z}{\partial z}-\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g})-\dot{G}=0 \tag{7}$$

Finalmente, las derivadas parciales de los componentes del vector de densidad de flujo de energía corresponden a la divergencia de dicho vector, por lo que la ecuación se puede escribir de forma compacta usando notación vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\mathbf{e}-\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}\right)-\dot{G}=0 \tag{8}$$

Sustituyendo la definición del vector $\mathbf{e}$ dada al principio:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\left[\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\hat{U}\right)\mathbf{v}+\mathbf{q}+\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}+P\mathbf{v}\right]-\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}\right)-\dot{G}=0 \tag{9}$$

Se llega finalmente a la forma más general de la ecuación de conservación de la energía:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\hat{U}\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\mathbf{q}+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(P\mathbf{v}\right)-\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}\right)-\dot{G}=0} \tag{10}$$

3. Ecuaciones de energía mecánica y de energía interna

La ecuación de conservación de la energía se puede separar en dos: una para energía mecánica (donde sólo aparezcan las energías cinética y potencial) y otra para energía interna (donde **no** aparezcan las energías cinética y potencial).

3.1 *Ecuación de conservación de la energía mecánica*

Esta ecuación se obtiene al reconocer el hecho de que se puede llegar a la energía cinética a partir del momentum:

$$\underset{\text{momentum}}{mv}\xrightarrow{\text{multiplicar por la velocidad}} mv^2 \xrightarrow{\text{dividir entre dos}} \underset{\text{energía cinética}}{\tfrac{1}{2}mv^2} \tag{11}$$

Considérese entonces, la ecuación de conservación de momentum:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\nabla P-\rho\mathbf{g}=0 \tag{12}$$

Al tomar el producto punto de toda la ecuación con el vector de velocidad $\mathbf{v}$ se tiene:

$$\mathbf{v}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\nabla P-\rho\mathbf{g}\right]=0 \tag{13}$$

$$\mathbf{v}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\mathbf{v}\right)\right]+\mathbf{v}\cdot\left[\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\right)\right]+\mathbf{v}\cdot\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right)+\mathbf{v}\cdot\left(\nabla P\right)-\mathbf{v}\cdot\left(\rho\mathbf{g}\right)=0 \tag{14}$$

Que se puede reacomodar para llegar a la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}\right)-\tau:\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla P-\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}\right)=0} \tag{15}$$

donde se ha hecho uso de las siguientes identidades:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)=2\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=v^2\qquad \boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}\right)-\mathbf{v}\cdot\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}\right) \tag{16}$$

La última identidad, para el **producto doble punto** de dos tensores, es válida cuando $\boldsymbol{\tau}$ es un tensor simétrico.

3.2 *Ecuación de conservación de la energía interna*

Al tomar la **ecuación de conservación de la energía** (Ecuación 10) y restarle **la ecuación de conservación de la energía mecánica** (Ecuación 15), se llega a una ecuación que sólo contiene los términos "microscópicos" de la energía (la energía interna, que es la suma de las energías cinética y potencial **de las moléculas**):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\hat{U}\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\mathbf{q}+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(P\mathbf{v}\right)-\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}\right)-\dot{G}=0 \qquad \text{energía (ec. 10)}$$

$$-\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)+\nabla\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{v}\right)-\tau:\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla P-\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{g}\right)=0 \qquad \text{energía mecánica (ec. 15)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\hat{U}\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}+\nabla\cdot\left(P\mathbf{v}\right)-\mathbf{v}\cdot\nabla P-\dot{G}=0 \qquad \text{energía interna}$$

Con la identidad $\nabla\cdot\left(P\mathbf{v}\right)=P\nabla\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\nabla P$ se llega a la forma final de la ecuación de conservación de la energía interna:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\hat{U}\mathbf{v}\right)+\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}+P\nabla\cdot\mathbf{v}-\dot{G}=0} \tag{17}$$

Esta última ecuación rara vez es usada como tal, sino que es simplificada para usarse en situaciones particulares.

4. Simplificaciones de la ecuación de conservación de la energía

4.1 *Simplificación del término de acumulación y advección usando la ecuación de continuidad*

De la ecuación de conservación de la energía interna, considérese sólo los primeros términos: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\hat{U}\mathbf{v}\right)$. Expresando la divergencia en coordenadas rectangulares:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\hat{U}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\hat{U}v_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\hat{U}v_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\hat{U}v_z\right) \tag{18}$$

Ahora se aplica la regla para derivadas de productos (la densidad y la velocidad se tratan como un solo factor):

$$\rho\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}+\hat{U}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho v_x\frac{\partial\hat{U}}{\partial x}+\hat{U}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x\right)+\rho v_y\frac{\partial\hat{U}}{\partial y}+\hat{U}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_y\right)+\rho v_z\frac{\partial\hat{U}}{\partial z}+\hat{U}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_z\right) \tag{19}$$

Agrupando los términos que tienen a $\hat{U}$ como factor común:

$$\rho\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}+\rho v_x\frac{\partial\hat{U}}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial\hat{U}}{\partial y}+\rho v_z\frac{\partial\hat{U}}{\partial z}+\hat{U}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_z\right)\right] \tag{20}$$

Lo que aparece entre corchetes es la ecuación de conservación de masa, que es idénticamente cero, quedando solo:

$$\rho\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}+\rho v_x\frac{\partial\hat{U}}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial\hat{U}}{\partial y}+\rho v_z\frac{\partial\hat{U}}{\partial z} \tag{21}$$

Reconociendo en los tres últimos términos el producto punto de la velocidad $\mathbf{v}$ con el gradiente de la energía interna $\nabla\hat{U}$, y regresando estos términos a la ecuación de conservación de la energía interna (Ecuación 11), se tiene:

$$\rho\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{U}+\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}+P\nabla\cdot\mathbf{v}-\dot{G}=0 \tag{22}$$

4.2 *Cambio a una ecuación para temperatura*

La siguiente simplificación es efectuar el cambio de energía interna a entalpía, usando $\hat{H} = \hat{U} + P\hat{V}$, y luego cambiar a temperatura empleando la relación termodinámica $c_P = \partial\hat{H} / \partial T$, por lo que $\partial\hat{H} = c_P \partial T$, con lo que la ecuación queda:

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \mathbf{v} \cdot \nabla T + \nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P\right] - \dot{G} = 0 \tag{23}$$

Luego se usa la ley de Fourier de la conducción:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \tag{24}$$

con lo que el término $\nabla \cdot \mathbf{q}$ se vuelve $-\nabla \cdot (k\nabla T)$, o bien $-k\nabla^2 T$ si la conductividad térmica es constante:

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \mathbf{v} \cdot \nabla T - k\nabla^2 T + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P\right] - \dot{G} = 0 \tag{25}$$

4.3 *Disipación viscosa*

El término $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ representa la **conversión irreversible de energía mecánica a calor** debido a la fricción en el fluido por las fuerzas viscosas. Al sustituir el esfuerzo $\boldsymbol{\tau}$ con la ley de Newton de la viscosidad, el término $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ se vuelve:

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -\mu(\dot{\gamma} : \nabla \mathbf{v}) \tag{26}$$

donde el término entre paréntesis es una función siempre positiva de las derivadas de la velocidad que se denomina "disipación viscosa":

$$\Phi_v \equiv \dot{\gamma} : \nabla \mathbf{v} \tag{27}$$

La disipación viscosa Φ_v sólo es importante para flujos muy viscosos o con elevados gradientes de velocidad. Así, la ecuación de conservación de la energía térmica queda:

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \mathbf{v} \cdot \nabla T - k\nabla^2 T - \mu\Phi_v + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P\right] - \dot{G} = 0 \tag{28}$$

4.4 *Simplificaciones finales*

Cuando se tiene un gas ideal, $PV = nRT$, se puede demostrar que $[\partial(\ln\rho) / \partial(\ln T)]_P = -1$, así que la Ecuación 28 se simplifica a:

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \mathbf{v} \cdot \nabla T - k\nabla^2 T - \mu\Phi_v - \left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P\right] - \dot{G} = 0 \tag{29}$$

Si se tiene un flujo a presión constante o un material con densidad constante, la Ecuación 28 se simplifica a:

$$\boxed{\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \mathbf{v} \cdot \nabla T - k\nabla^2 T - \mu\Phi_v - \dot{G} = 0} \tag{30}$$

Si además se tiene un material **en reposo** (ya sea sólido o fluido), la velocidad es cero, con lo que la Ecuación 30 queda:

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} - k\nabla^2 T - \dot{G} = 0 \tag{31}$$