MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA EN EXCEL
para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Antecedentes

Un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas se puede escribir en la forma general:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

donde los números $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ son los coeficientes de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son los términos independientes. Este sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{A}$ se denomina matriz de coeficientes, y $\mathbf{b}$ es el vector de términos independientes.

Si el determinante de $\mathbf{A}$ es distinto de cero, la matriz de coeficientes tiene una inversa y el sistema de ecuaciones tiene una solución única dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

EJEMPLO

Considerar el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

como $\det \mathbf{A} = -8$ (diferente de cero), la matriz es invertible, y su inversa es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.125 & -0.25 \\ -0.125 & -0.375 & 0.75 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución del sistema es simplemente el producto de $\mathbf{A}^{-1}$ por $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.125 & -0.25 \\ -0.125 & -0.375 & 0.75 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

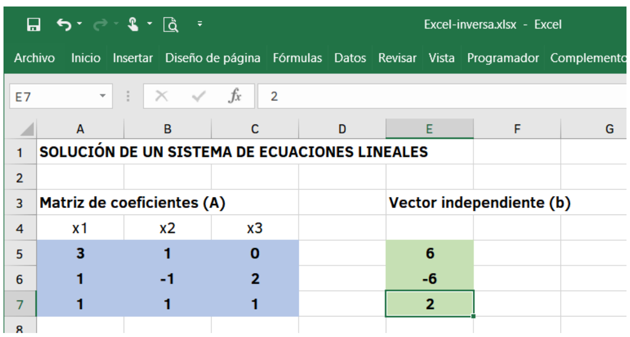
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Implementación del método de la inversa en Excel™

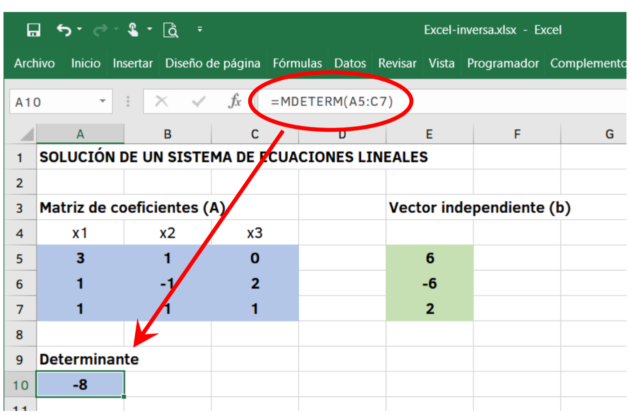
Nota: Dependiendo de la versión de Excel y el lenguaje usado, los nombres de las funciones pueden ser ligeramente diferentes.

El método de la inversa no suele emplearse con sistemas muy grandes debido a las dificultades en calcular la matriz inversa. Aún así, las funciones para matrices en Excel hacen que la aplicación del método de la inversa sea relativamente sencillo y directo.

El primer paso es poner la matriz de coeficientes ($\mathbf{A}$) y el vector de términos independientes ($\mathbf{b}$) en la hoja de cálculo. Marcar las celdas con algún color e indicar a qué incógnita corresponde cada columna es opcional, pero ayuda a identificar fácilmente las matrices y los coeficientes de cada incógnita. Usando el ejemplo mostrado anteriormente, la hoja de cálculo con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ se muestra en la figura:



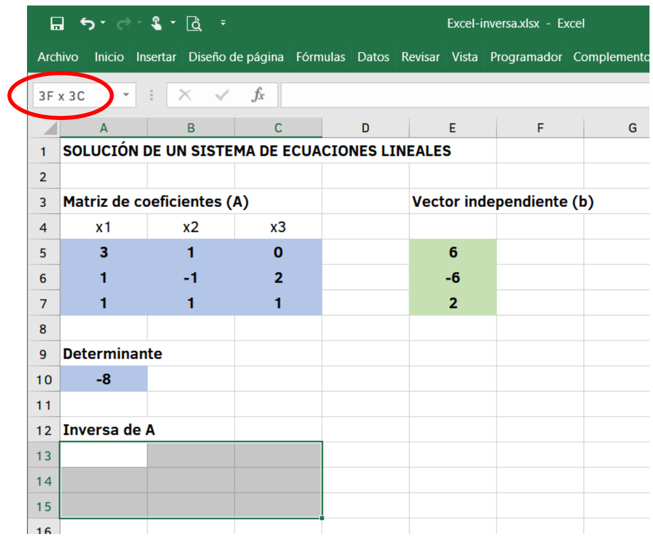
A continuación es conveniente calcular el determinante de $\mathbf{A}$. Este paso no es en realidad necesario, pero si el determinante es cero, el sistema no se puede resolver por este método (no tiene solución o existe un número infinito de soluciones).



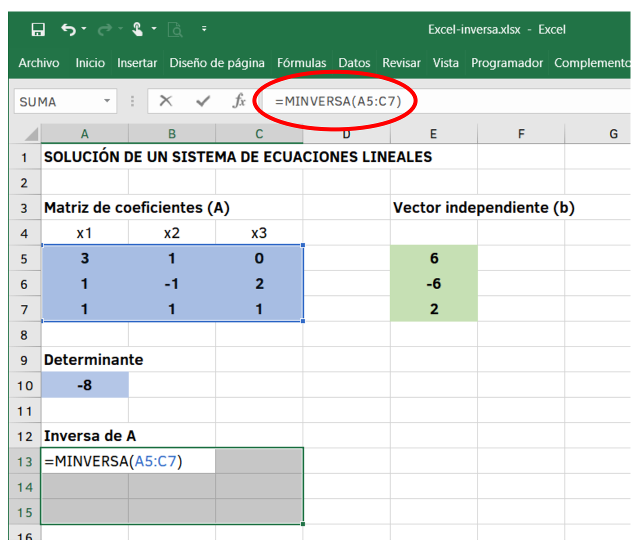
La función para calcular el determinante se es `MDETERM`, y toma como parámetro un rango de celdas, en este caso `A5:C7`, que son las celdas donde se pusieron los valores de la matriz $\mathbf{A}$. Como en este caso el determinante es diferente de cero, se puede proceder a calcular la inversa.

La función que calcula la inversa va a producir otra matriz, por lo que se debe introducir simultáneamente (usando **SHIFT+CONTROL+ENTER**) en todas las celdas del resultado. Para ello, hay que seleccionar primero las celdas destino con el mismo tamaño que $\mathbf{A}$, en este caso, tres filas y tres columnas.

Cuando la matriz es muy grande, es más fácil hacer la selección con el teclado (Shift y las flechas), viendo el tamaño seleccionado en la esquina superior izquierda:

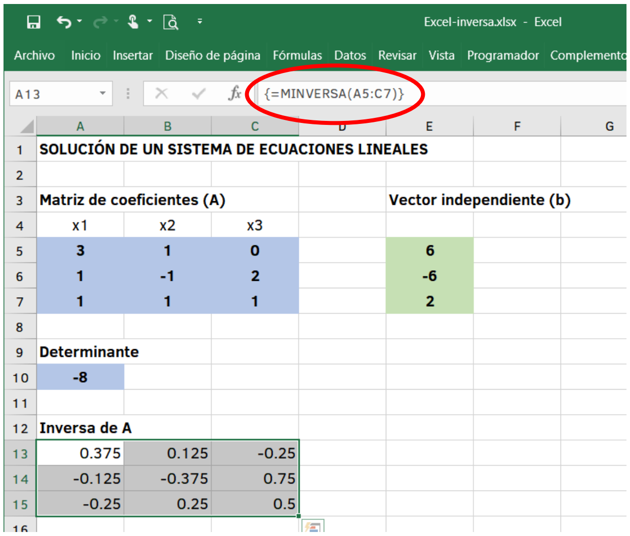


Una vez hecha la selección, se escribe la fórmula para la inversa, `MINVERSA`, usando como parámetro el rango `A5:C7` correspondiente a la matriz $\mathbf{A}$.

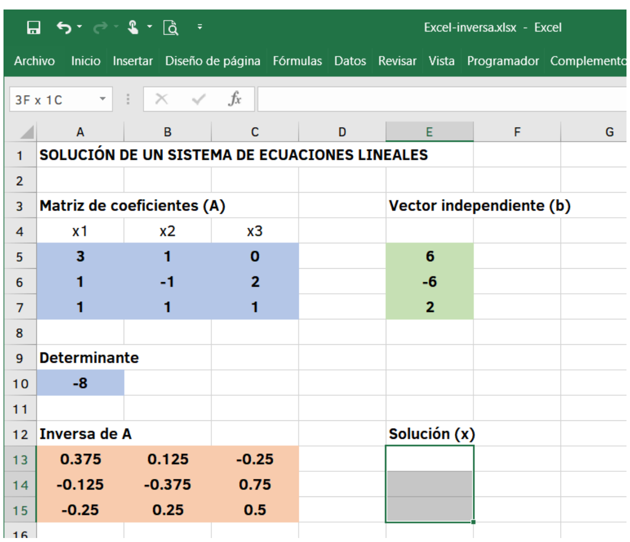


No presionar ENTER o usar las flechas para introducir la fórmula. **Para que la fórmula quede correctamente como matriz, hay que usar SHIFT+CONTROL+ ENTER**.

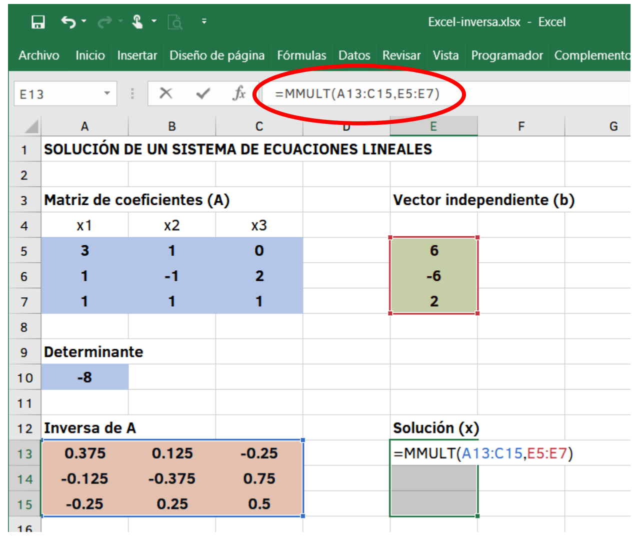
Los valores de la matriz deberán aparecer simultáneamente en todas las celdas, y la fórmula queda encerrada en llaves { }. Una fórmula no se converte en matriz sólo por encerrarla en llaves, hay que haberla puesto usando SHIFT+CONTROL+ENTER.



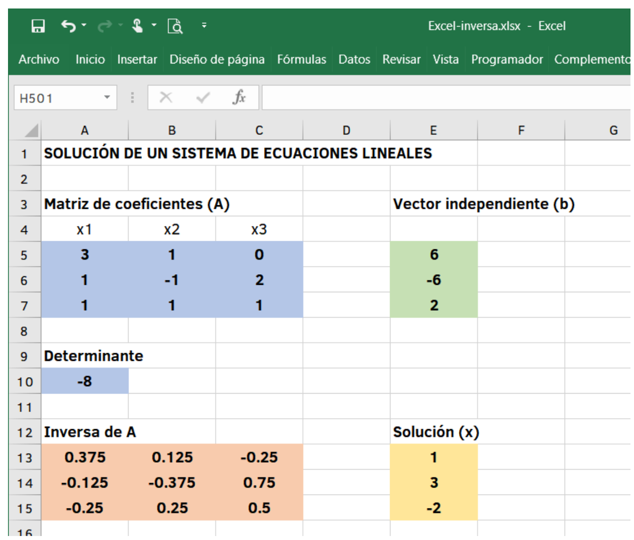
Como la solución buscada también es una matriz, hay que introducir su fórmula del mismo modo que se introdujo la fórmula de la inversa. Primero se selecciona una columna de tres celdas:



Luego se escribe la fórmula para la multiplicación de matrices. En este caso, la solución será el producto de la matriz inversa por el vector independiente. La fórmula es MMULT y usa dos argumentos: el primero es el rango de celdas de la matriz inversa (A13:C15), y el segundo es el rango de celdas del vector independiente (E5:E7), en ese orden:



Nuevamente, se usa SHIFT+CONTROL+ENTER para que la fórmula sea introducida como matriz, y al hacerlo se obtiene la solución del sistema de ecuaciones:



Los valores en el vector de solución están en el mismo orden que los coeficientes de las incógnitas en la matriz de coeficientes:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 3$$
$$x_3 = -2$$