NÚMERO DE CONDICIÓN

En un sentido general, el número de condición κ (en inglés: *condition number*) es una medida de qué tanto varía el resultado de un problema matemático si varían los datos usados para determinarlo.

- ★ Si κ es "pequeño", se dice que el problema está **bien condicionado** (en inglés: *well-conditioned*), y el resultado del problema matemático no se verá afectado sustancialmente por variaciones en los datos.
- ★ Si κ es "grande", el problema está **mal condicionado** (en inglés: *ill-conditioned*) y el resultado del problema cambiará mucho si varían los datos.

Número de condición para una función de una variable

Para una función $f(x)$, el número de condición está dado por $\kappa = \left|\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\right|$.

Deducción del número de condición para una función de una variable

Dada una función $f(x)$, asumir que se tiene como dato una aproximación $\tilde{x}$ correspondiente un valor exacto x y que es posible evaluar $f(\tilde{x})$ sin introducir errores adicionales. Los errores relativos, del dato y de la función, son:

error relativo en el dato $\tilde{x}$	$\left\|\dfrac{\tilde{x}-x}{x}\right\|$
error relativo en la función $f(\tilde{x})$	$\left\|\dfrac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right\|$

¿Cómo están relacionados estos dos errores? Se comienza con una serie de Taylor para $f(\tilde{x})$, con centro en x:

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x) + \tfrac{1}{2}f''(x)(\tilde{x}-x)^2 + \cdots$$

Truncando después del término lineal:

$$f(\tilde{x}) \approx f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x)$$

Esta ecuación se reacomoda, restando $f(x)$ a ambos lados de la ecuación y dividiendo entre $f(x)$:

$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} \approx \frac{f'(x)(\tilde{x}-x)}{f(x)}$$

El lado derecho de la ecuación se multiplica y divide por x, para poder reacomodar:

$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} \approx \frac{f'(x)(\tilde{x}-x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} \approx \frac{xf'(x)}{f(x)} \cdot \frac{(\tilde{x}-x)}{x}$$

Tomando el valor absoluto de ambos lados de la ecuación:

$$\left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| \approx \left|\frac{xf'(x)}{f(x)} \cdot \frac{(\tilde{x}-x)}{x}\right|$$

El lado derecho se puede separar de acuerdo a la identidad $|ab| = |a||b|$ para llegar a:

$$\underbrace{\left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right|}_{\substack{\text{error relativo}\\ \text{de } f(\tilde{x})}} \approx \underbrace{\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|}_{\kappa} \underbrace{\left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right|}_{\substack{\text{error relativo}\\ \text{de } \tilde{x}}}$$

Se llega entonces a la conclusion de que **el error relativo** del dato $\tilde{x}$ **es amplificado** por un factor κ cuando se usa para evaluar la función $f(\tilde{x})$.

■