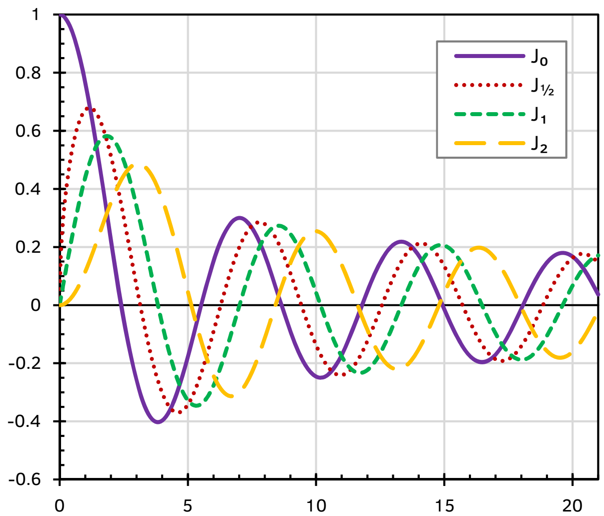
Funciones de Bessel $J_0(\ )$

Las funciones de Bessel son cuatro funciones $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ que aparecen frecuentemente al resolver ecuaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas o esféricas. Se nombran así en honor de Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846). El parámetro ν, que aparece como subíndice de la función, es el **orden** de la función.

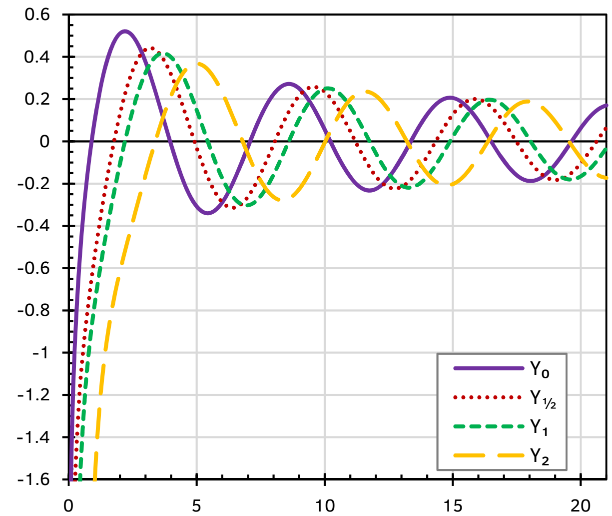
función de Bessel del primer tipo

$$J_\nu(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$



función de Bessel del segundo tipo

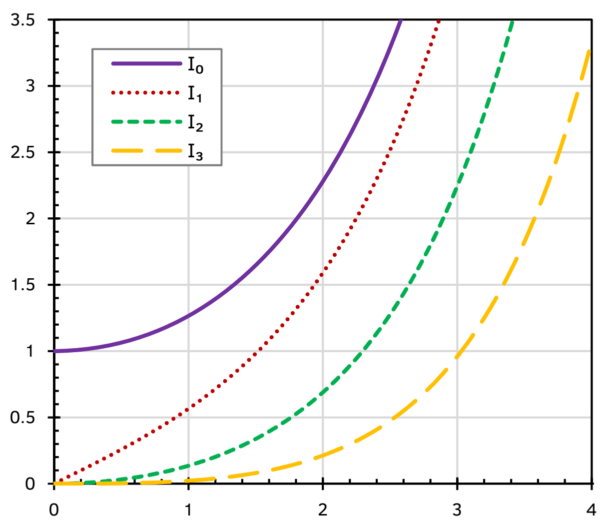
$$Y_\nu(x) \equiv \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$



½

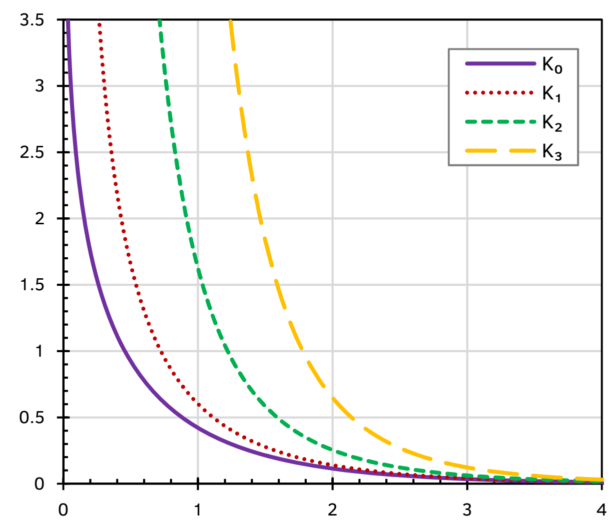
función modificada de Bessel del primer tipo

$$I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix)$$



función modificada de Bessel del segundo tipo

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$



Ecuaciones que se pueden resolver en términos de las funciones de Bessel

Ecuación diferencial de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel aparece frecuentemente en el estudio de sistemas cilíndricos o esféricos:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

Para cualquier valor de ν, la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = C_1 \mathrm{J}_\nu(x) + C_2 \mathrm{Y}_\nu(x)$$

La ecuación de Bessel también aparencen frecuentemente con un cambio de signo:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \left(x^2 + \nu^2\right) y = 0$$

Mediante un cambio de variables empleando números imaginarios se puede escribir esta ecuación en la forma de la ecuación de Bessel. En este caso, la solución general es:

$$y(x) = C_1 \mathrm{I}_\nu(x) + C_2 \mathrm{K}_\nu(x)$$

Forma general 1

$$\frac{d}{dx}\left(x^m \frac{dy}{dx}\right) + \left(ax^q + bx^{m-2}\right) y = 0$$

tiene como solución general:

$$y(x) = x^\alpha \left[C_1 \mathrm{J}_\nu\left(\lambda x^\gamma\right) + C_2 \mathrm{Y}_\nu\left(\lambda x^\gamma\right)\right]$$

donde: $$\alpha = \frac{1-m}{2},\ \gamma = \frac{2-m+q}{2},\ \lambda = \frac{2\sqrt{|a|}}{2-m+q},\ \nu = \frac{\sqrt{(1-m)^2 - 4b}}{2-m+q}$$

- ★ Si $a < 0$, J_ν y Y_ν se deben cambiar a I_ν y K_ν, resepectivamente.
- ★ Si ν no es un entero, Y_ν y K_ν se pueden remplazar por $\mathrm{J}_{-\nu}$ y $\mathrm{I}_{-\nu}$ si se desea.

Forma general 2

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\left(a + 2bx^p\right)\frac{dy}{dx} + \left[c + sx^{2q} + b(a+p-1)x^p + b^2 x^{2p}\right] y = 0$$

tiene como solución general: $$y(x) = x^\alpha \, \mathrm{e}^{-\beta x^p}\left[C_1 \mathrm{J}_\nu\left(\lambda x^q\right) + C_2 \mathrm{Y}_\nu\left(\lambda x^q\right)\right]$$

donde: $$\alpha = \frac{1-a}{2},\ \beta = \frac{b}{p},\ \lambda = \frac{\sqrt{|s|}}{q},\ \nu = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{2q}$$

- ★ Si $s < 0$, J_ν y Y_ν se deben cambiar a I_ν y K_ν, resepectivamente.
- ★ Si ν no es un entero, Y_ν y K_ν se pueden remplazar por $\mathrm{J}_{-\nu}$ y $\mathrm{I}_{-\nu}$ si se desea.

Derivadas de las funciones Bessel

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{J}_\nu(ax)\right] = a\mathrm{J}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(ax)$$
$$= -a\mathrm{J}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{Y}_\nu(ax)\right] = a\mathrm{Y}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{Y}_\nu(ax)$$
$$= -a\mathrm{Y}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{Y}_\nu(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{I}_\nu(ax)\right] = a\mathrm{I}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{I}_\nu(ax)$$
$$= a\mathrm{I}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{I}_\nu(ax)$$
$$= \frac{a}{2}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(ax) + \mathrm{I}_{\nu+1}(ax)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}_\nu(ax)\right] = -a\mathrm{K}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{K}_\nu(ax)$$
$$= -a\mathrm{K}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{K}_\nu(ax)$$
$$= -\frac{a}{2}\left[\mathrm{K}_{\nu-1}(ax) + \mathrm{K}_{\nu+1}(ax)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(ax)\right] = ax^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu \mathrm{Y}_\nu(ax)\right] = ax^\nu \mathrm{Y}_{\nu-1}(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu \mathrm{I}_\nu(ax)\right] = ax^\nu \mathrm{I}_{\nu-1}(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu \mathrm{K}_\nu(ax)\right] = -ax^\nu \mathrm{K}_{\nu-1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(ax)\right] = -ax^{-\nu} \mathrm{J}_{\nu+1}(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} \mathrm{Y}_\nu(ax)\right] = -ax^{-\nu} \mathrm{Y}_{\nu+1}(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} \mathrm{I}_\nu(ax)\right] = ax^{-\nu} \mathrm{I}_{\nu+1}(ax)$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} \mathrm{K}_\nu(ax)\right] = -ax^{-\nu} \mathrm{K}_{\nu+1}(ax)$$