DERIVADAS NUMÉRICAS

Adaptado principalmente de Chapra y Canale (1988).

Dada una función $y = f(x)$ (o una tabla de valores igualmente espaciados), sus derivadas (y', y'', y''', etcétera), evaluadas en el punto x_0, se pueden estimar usando diferencias finitas, ya sea hacia adelante (usando valores mayores que x_0), hacia atrás (valores menores que x_0) o centrales (a ambos lados de x_0). Se define el "tamaño de paso" h como la distancia entre los valores de x, y se introduce la siguiente notación (para valores enteros de k):

$$x_k = x_0 + kh \qquad y_k = f(x_k)$$

Diferencias finitas hacia adelante

fórmulas de primer orden $\mathcal{O}(h)$	fórmulas de segundo orden $\mathcal{O}(h^2)$
$y'(x_0) = \dfrac{y_1 - y_0}{h}$	$y'(x_0) = \dfrac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}$
$y''(x_0) = \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$	$y''(x_0) = \dfrac{-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0}{h^2}$
$y'''(x_0) = \dfrac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3}$	$y'''(x_0) = \dfrac{-3y_4 + 14y_3 - 24y_2 + 18y_1 - 5y_0}{2h^3}$
$y^{(4)}(x_0) = \dfrac{y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0}{h^4}$	$y^{(4)}(x_0) = \dfrac{-2y_5 + 11y_4 - 24y_3 + 26y_2 - 14y_1 + 3y_0}{h^4}$

Diferencias finitas hacia atrás

fórmulas de primer orden $\mathcal{O}(h)$	fórmulas de segundo orden $\mathcal{O}(h^2)$
$y'(x_0) = \dfrac{y_0 - y_{-1}}{h}$	$y'(x_0) = \dfrac{3y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{2h}$
$y''(x_0) = \dfrac{y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}}{h^2}$	$y''(x_0) = \dfrac{2y_0 - 5y_{-1} + 4y_{-2} - y_{-3}}{h^2}$
$y'''(x_0) = \dfrac{y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3}}{h^3}$	$y'''(x_0) = \dfrac{5y_0 - 18y_{-1} + 24y_{-2} - 14y_{-3} + 3y_{-4}}{2h^3}$
$y^{(4)}(x_0) = \dfrac{y_0 - 4y_{-1} + 6y_{-2} - 4y_{-3} + y_{-4}}{h^4}$	$y^{(4)}(x_0) = \dfrac{3y_0 - 14y_{-1} + 26y_{-2} - 24y_{-3} + 11y_{-4} - 2y_{-5}}{h^4}$

Diferencias finitas centrales

fórmulas de segundo orden $\mathcal{O}(h^2)$	fórmulas de cuarto orden $\mathcal{O}(h^4)$
$y'(x_0) = \dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h}$	$y'(x_0) = \dfrac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h}$
$y''(x_0) = \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_1}{h^2}$	$y''(x_0) = \dfrac{-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}}{12h^2}$
$y'''(x_0) = \dfrac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3}$	$y'''(x_0) = \dfrac{-y_3 + 8y_2 - 13y_1 + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3}}{8h^3}$
$y^{(4)}(x_0) = \dfrac{y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{h^4}$	$y^{(4)}(x_0) = \dfrac{-y_3 + 12y_2 - 39y_1 + 56y_0 - 39y_{-1} + 12y_{-2} - y_{-3}}{6h^4}$