SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

POR SEPARACIÓN DE VARIABLES O FACTOR DE INTEGRACIÓN

Hay varios métodos de solución para ecuaciones diferenciales de primer orden. Aquí sólo se mencionan el método de **separación de variables**, y el método del **factor de integración** para ecuaciones lineales de primer orden. Otros métodos tienen aplicación menos frecuente y pueden consultarse en libros de ecuaciones diferenciales.

Método de separación de variables

La ecuación diferencial más simple que existe es: $\frac{dy}{dx} = 0$, y su solución es simplemente $y = C$, ya que sólo la derivada de una constante es igual a cero.

Esta idea se extiende a cualquier caso donde se tenga la derivada de una expresión matemática igualada a cero. Automáticamente, la solución es esa misma expresión igualada a una constante:

$$\frac{d}{dx}\left(2\text{🐈} + \text{🌎} + 1\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\text{🐈} + \text{🌎} + 1 = C$$

Si una ecuación diferencial se puede acomodar en la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$, se dice que es **separable**. La solución se obtiene reacomodando e integrando:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

Método del factor de integración

Este método se puede aplicar a cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden. A continuación se detalla formalmente el procedimiento de solución:

1	Si es necesario, reacomodar la ecuación en la forma indicada, para identificar la función $P(x)$:	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$
2	Obtener el factor de integración:	$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
3	Multiplicar toda la ecuación por el factor de integración:	$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)f(x)$
4	El lado izquierdo de la ecuación resulta ser equivalente a la derivada del producto del factor de integración por la variable dependiente: (este paso se suele escribir directamente, pero es una buena costumbre verificar que efectivamente equivale a la ecuación del paso anterior).	$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \mu(x)f(x)$
5	El diferencial dx pasa multiplicando y se integra a ambos lados:	$\int d\left[\mu(x)y\right] = \int \mu(x)f(x)dx$ $\mu(x)y = \int \mu(x)f(x)dx + C$
6	Finalmente se despeja la variable dependiente:	$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)f(x)dx + C\right]$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

LINEALES HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

De todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden, el caso más común es la **ecuación diferencial de segundo orden, lineal, homogénea, de coeficientes constantes**, que tiene la forma:

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

donde a_2, a_1 y a_0 son constantes reales y $a_2 \neq 0$. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es el polinomio de segundo grado en m:

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

Las raíces del polinomio son los valores de m que satisfacen la ecuación característica, m_1 y m_2, obtenidas por factorización o aplicando la fórmula general para una ecuación de segundo grado. La solución general de la ecuación diferencial se establece entonces directamente dependiendo del tipo de estas raíces, según los casos siguientes:

CASO 1: *Raíces reales diferentes*

Si las raíces son dos números reales diferentes m_1 y m_2, la solución general está expresada en términos de funciones exponenciales de la siguiente forma:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

CASO 2: *Raíces reales repetidas*

Si las dos raíces son reales e iguales, es decir, $m_1 = m_2 = m$, entonces la solución general es de la forma:

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

CASO 3: *Raíces complejas conjugadas*

Si las raíces son de la forma $m = a \pm bi$ (o bien, $m_1 = a + bi$ y $m_2 = a - bi$), entonces la solución general es una combinación de una función exponencial con funciones trigonométricas de la forma:

$$y = C_1 e^{ax} \operatorname{sen}(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx)$$

CASO ESPECIAL 1: *Raíces imaginarias puras*

Si las raíces no tienen parte real, siendo de la forma $m = \pm bi$ (es decir, $m_1 = bi$ y $m_2 = -bi$), la solución no tiene parte exponencial y sólo está formada por funciones trigonométricas:

$$y = C_1 \operatorname{sen}(bx) + C_2 \cos(bx)$$

CASO ESPECIAL 2: *Raíces reales iguales pero de signo opuesto*

Si las raíces son de la forma $m = \pm a$ (es decir, $m_1 = a$ y $m_2 = -a$) la solución puede expresarse en términos de funciones trigonométricas hiperbólicas (en vez de funciones exponenciales):

$$y = C_1 \operatorname{senh}(ax) + C_2 \cosh(ax)$$

NOTA: Este método se extiende directamente para las ecuaciones diferenciales homogéneas, de coeficientes constantes, de orden mayor a dos.