MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA EN EXCEL
para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Antecedentes

Un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas se puede escribir en la forma general:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

donde los números $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ son los coeficientes de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son los términos independientes.

Este sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o de manera compacta $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{b}$ es el vector de términos independientes:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si el determinante de $\mathbf{A}$ es distinto de cero, la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ de la matriz de coeficientes existe y el sistema de ecuaciones tiene una solución única dada por:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$

EJEMPLO

Considerar el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como $\det \mathbf{A} = -8$ (diferente de cero), la matriz es invertible, y su inversa es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.125 & -0.25 \\ -0.125 & -0.375 & 0.75 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

por lo que la solución del sistema es simplemente el producto de $\mathbf{A}^{-1}$ por $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.375 & 0.125 & -0.25 \\ -0.125 & -0.375 & 0.75 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

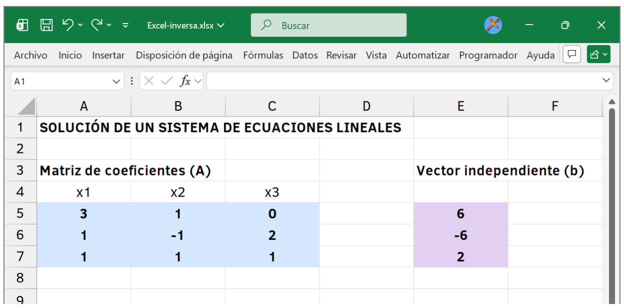
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Implementación del método de la inversa en Excel™

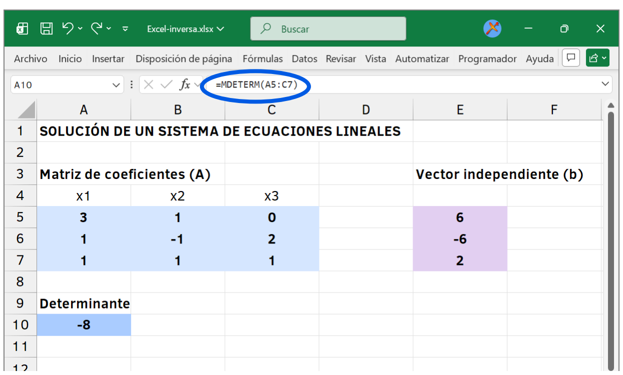
Nota: Dependiendo de la versión de Excel y la configuración del lenguaje, los nombres de las funciones pueden ser diferentes.

El método de la inversa no suele emplearse con sistemas muy grandes debido a las dificultades en calcular la matriz inversa. Aún así, las funciones para matrices en Excel hacen que la aplicación del método de la inversa sea relativamente sencillo y directo.

Primero se pone la matriz de coeficientes ($\mathbf{A}$) y el vector de términos independientes ($\mathbf{b}$) en la hoja de cálculo. Marcar las celdas con color e indicar a qué incógnita corresponde cada columna es opcional, pero ayuda a identificar fácilmente cada matriz. Usando el ejemplo mostrado anteriormente, la hoja de cálculo con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ se muestra en la figura:

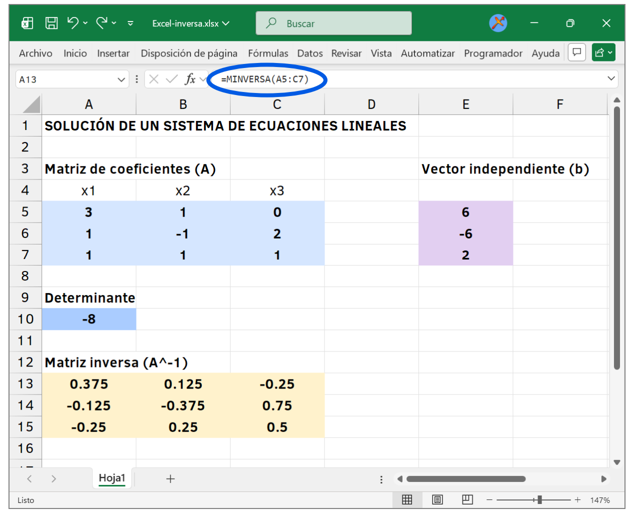


Es conveniente calcular el determinante de la matriz $\mathbf{A}$. Este paso no es indispensable, pero hay que recordar que si el determinante es cero, el sistema no se puede resolver por este método.

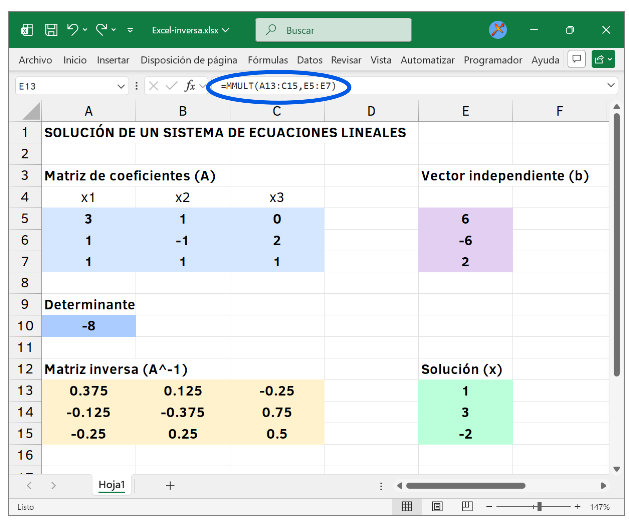


La función para calcular el determinante es **`MDETERM`**, y toma como parámetro un rango de celdas, en este caso **`A5:C7`**, las celdas donde se pusieron los valores de la matriz $\mathbf{A}$. Como el determinante no es cero, la matriz inversa existe y se puede proceder a calcularla.

La función que calcula la inversa produce otra matriz[*] por lo que, en la primer celda donde irá la inversa se escribe la función **`MINVERSA`**, indicando el rango de la matriz $\mathbf{A}$ (**`A5:C7`**). Al presionar ENTER, la matriz debe aparecer simultáneamente en todas las celdas:



La solución buscada también es una matriz (vector), que resulta de multiplicar $\mathbf{A}^{-1}$ por $\mathbf{b}$. En la primera celda donde irá el resultado, se escribe la función **`MMULT`** que usa dos argumentos: el primero es el rango de celdas de la matriz inversa (**`A13:C15`**), y el segundo es el rango de celdas del vector independiente (**`E5:E7`**), en ese orden:



Los valores en el vector de solución obtenido están en el mismo orden que los coeficientes de las incógnitas en la matriz de coeficientes:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = -2$$

■

[*] En versiones anteriores de Excel, cuando la fórmula iba a producir una matriz, era necesario seleccionar primero todas las celdas que recibirían el resultado, escribir la fórmula, y presionar SHIFT+CONTROL+ENTER para que la fórmula ocupara todas las celdas. Actualmente, basta con escribir la fórmula en la primera celda y presionar ENTER, y Excel se encarga de "desbordar" la fórmula automáticamente.