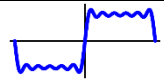


SERIES DE FOURIER



DEFINICIÓN GENERAL, para una función $f(x)$ definida en $-L < x < L$ con periodo $p = 2L$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Forma armónica de la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega_0 x + \delta_n)$$

frecuencia fundamental

amplitud armónica

ángulo de fase

el espectro de amplitud es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{L}$$

$$\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\delta_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

la gráfica de los puntos:
 $(0, \frac{a_0}{2})$ y $(n\omega_0, \frac{\alpha_n}{2})$

Serie de Fourier de funciones pares e impares

FUNCIÓN PAR	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$			
	$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$	$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$b_n = 0$	
FUNCIÓN IMPAR	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$			
	$a_0 = 0$	$a_n = 0$	$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$	

Extensiones de medio intervalo de la serie de Fourier

EXTENSIÓN PAR	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$			
	$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$	$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$	$b_n = 0$	
EXTENSIÓN IMPAR	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$			
	$a_0 = 0$	$a_n = 0$	$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$	
EXTENSIÓN PERIÓDICA	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \right)$			
	$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$	$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx$	$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} dx$	

Forma compleja de la serie de Fourier			
$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{n\omega_0 x i}$ con frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi}{L}$			
coeficientes complejos	$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$	$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-n\omega_0 x i} dx$	$c_{-n} = \bar{c}_n$ (complejo conjugado)
relación con los coeficientes de la serie de Fourier	$c_0 = \frac{a_0}{2}$	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n i)$	$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + b_n i)$

NOTA: Al efectuar la sumatoria en la serie compleja de Fourier, siempre tomar el mismo número de coeficientes positivos y negativos.

Algunas integrales útiles para series de Fourier

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax + C$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos ax + C$$

$$\int x^3 \cos ax dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \sin ax + C$$

$$\int x^3 \sin ax dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4} \right) \sin ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3} \right) \cos ax + C$$

$$\int x^4 \cos ax dx = \left(\frac{4x^3}{a^2} - \frac{24x}{a^4} \right) \cos ax + \left(\frac{x^4}{a} - \frac{12x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5} \right) \sin ax + C$$

$$\int x^4 \sin ax dx = \left(\frac{4x^3}{a^2} - \frac{24x}{a^4} \right) \sin ax - \left(\frac{x^4}{a} - \frac{12x^2}{a^3} + \frac{24}{a^5} \right) \cos ax + C$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

Otras relaciones útiles

Para cualquier número n entero:

$$\cos n\pi = (-1)^n \quad \sin n\pi = 0$$