FUNCIONES HIPERBÓLICAS $\operatorname{senh}(\ )$

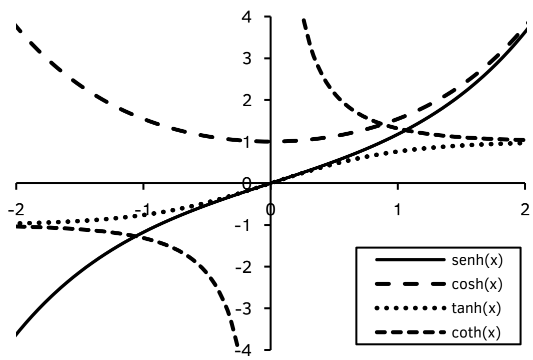
Las funciones hiperbólicas (también llamadas "trigonométricas hiperbólicas") son combinaciones especiales de funciones exponenciales, que aparecen en la solución de algunas ecuaciones diferenciales. Se les llama así porque tienen algunas características similares a las funciones trigonométricas (circulares).

Definiciones

$$\operatorname{senh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x \equiv \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth x \equiv \frac{1}{\tanh x}$$

Gráfica



Valores límite

	$x = 0$	$x \to -\infty$	$x \to +\infty$
$\operatorname{senh} x =$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\cosh x =$	1	$+\infty$	$+\infty$
$\tanh x =$	0	-1	1
$\coth x =$	$\pm\infty$	-1	1

Relaciones mutuas

$$\operatorname{senh} x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\cosh x = \sqrt{\operatorname{senh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{\coth x}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{\sinh^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$

Argumento negativo

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\tanh(-x) = -\tanh x \qquad \coth(-x) = -\coth x$$

Relación con los números complejos

$$\operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(z) \qquad \cosh(z) = \cos(iz)$$

$$\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen}(z) \qquad \cosh(iz) = \cos(z)$$

Identidades

$$\cosh x + \sinh x = e^x \qquad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \tanh x \coth x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad 1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1$$

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x - 1}{2} \qquad \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cosh x + 1}{2}$$

Teoremas de adición

$$\operatorname{senh}(A \pm B) = \operatorname{senh} A \cosh B \pm \cosh A \operatorname{senh} B$$

$$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$$

$$\tanh(A \pm B) = \frac{\tanh A \pm \tanh B}{1 \pm \tanh A \tanh B}$$

$$\coth(A \pm B) = \frac{\coth A \coth B \pm 1}{\coth A \coth B}$$

Derivadas

$$\frac{d}{dx} \operatorname{senh} u = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u = \operatorname{senh} u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \tanh u = \left(1 - \tanh^2 u\right) \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \coth u = \left(1 - \coth^2 u\right) \frac{du}{dx}$$

Integrales

$$\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \tanh u\, du = \ln(\cosh u) + C$$

$$\int \coth u\, du = \ln(\operatorname{senh} u) + C$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$