

# OPERACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES



El operador **nabla** en coordenadas rectangulares está definido como  $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$ .

Este operador permite usar una notación conveniente para ciertas operaciones diferenciales, ya que al tratarlo como vector se puede recordar con facilidad algunas operaciones, tales como la divergencia y el rotacional.

Debe quedar claro que nabla es un **operador diferencial vectorial** y que la notación usada en su definición no significa que las derivadas parciales sean de los vectores unitarios (derivadas tales como  $\frac{\partial \hat{\mathbf{i}}}{\partial x}$  serían idénticamente cero). Por lo tanto, nabla sólo tiene sentido cuando se utiliza con una función (escalar, vectorial o tensorial). Al símbolo  $\nabla$  se le conoce como "del".

## Operaciones diferenciales en coordenadas rectangulares

En esta tabla,  $f$  es una función escalar,  $\mathbf{F}$  es una función vectorial y  $\boldsymbol{\tau}$  es una función tensorial de segundo orden.

OPERADOR		APLICA A	RESULTA	DEFINICIÓN
gradiente	$\nabla f$	escalar	vector	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$
	$\nabla \mathbf{F}$	vector	tensor	$\nabla \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{F}$	vector	escalar	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
	$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$	tensor	vector	$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{k}}$
rotacional	$\nabla \times \mathbf{F}$	vector	vector	$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$
laplaciano	$\nabla^2 f$	escalar	escalar	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
	$\nabla^2 \mathbf{F}$	vector	vector	$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x) \hat{\mathbf{i}} + (\nabla^2 F_y) \hat{\mathbf{j}} + (\nabla^2 F_z) \hat{\mathbf{k}}$
biarmónico (bilaplaciano)	$\nabla^4 f$	escalar	escalar	$\nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2}$
de onda (de d'Alembert)	$\square^2 f$	escalar	escalar	$\square^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

## Algunas identidades vectoriales y tensoriales

En estas identidades,  $f$  y  $g$  son funciones escalares,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son funciones vectoriales y  $\tau$  es una función tensorial.  $\mathbf{AB}$  es el producto tensorial (diada) de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\nabla f) &\equiv \nabla^2 f & \nabla (fg) &\equiv f\nabla g + g\nabla f \\
 \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) &\equiv \nabla^2 \mathbf{A} & \nabla^2 (fg) &\equiv f\nabla^2 g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + g\nabla^2 f \\
 \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A})^T &\equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) & \nabla \cdot (f\mathbf{A}) &\equiv f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f \\
 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &\equiv \mathbf{0} & \nabla \times (f\mathbf{A}) &\equiv f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A} \\
 \nabla \times (\nabla f) &\equiv \mathbf{0} & \nabla^2 (f\mathbf{A}) &\equiv f\nabla^2 \mathbf{A} + 2(\nabla f) \cdot (\nabla \mathbf{A}) + \mathbf{A}\nabla^2 f \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &\equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} & \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &\equiv \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\
 \nabla^2 (\nabla f) &\equiv \nabla (\nabla^2 f) & \nabla^2 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &\equiv \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{A} + 2\nabla \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A}) \\
 \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{A}) &\equiv \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) & \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &\equiv \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
 \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) &\equiv \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) & \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &\equiv \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \\
 & & \nabla \cdot (\mathbf{AB}) &\equiv \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \\
 & & \nabla \cdot (f\tau) &= \nabla f \cdot \tau + f\nabla \cdot \tau
 \end{aligned}$$

## Definiciones integrales de la divergencia y el rotacional

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}}{\Delta V} \quad \nabla \times \mathbf{F} \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S}$$

## Algunos teoremas integrales

<p><b>teorema del gradiente</b></p> $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\vec{\ell} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$	<p>Sea <math>f</math> una función diferenciable, y sean <math>\mathbf{a}</math> y <math>\mathbf{b}</math> los vectores de posición de dos puntos en el espacio. La integral de línea de la componente del gradiente de <math>f</math> tangente a una curva <math>C</math> que une los puntos <math>\mathbf{a}</math> y <math>\mathbf{b}</math> es igual a la diferencia de <math>f</math> evaluada en los dos extremos de la curva <math>C</math>.</p>
<p><b>teorema de Gauss</b></p> $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$	<p>Sea <math>V</math> una región en el espacio encerrada por la superficie <math>S</math> continua por partes, y sea <math>\mathbf{F}</math> una función vectorial diferenciable. Entonces, la integral de la divergencia de <math>\mathbf{F}</math> en el volumen <math>V</math> es igual a la integral cerrada de área de la componente de <math>\mathbf{F}</math> normal a la superficie <math>S</math>.</p>
<p><b>teorema de Stokes</b></p> $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell}$	<p>Sea <math>S</math> una superficie abierta delimitada por una curva <math>C</math>, y sea <math>\mathbf{F}</math> una función vectorial diferenciable. Entonces, la integral del rotacional de <math>\mathbf{F}</math> en la superficie <math>S</math> es igual a la integral cerrada de línea de la componente de <math>\mathbf{F}</math> tangencial a la curva <math>C</math>.</p>

## Notación para las funciones tensoriales

Donde aplique,  $\tau$  es una función tensorial y  $\mathbf{AB}$  es el producto tensorial (diada) de los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , dados por:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix}$$