SERIES DE TAYLOR

Definición

Una función $f(x)$ puede ser expresada como una expansión en serie de potencias alrededor de un punto $x = x_0$ (llamado centro) mediante la serie infinita denominada **serie de Taylor**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

donde $f^{(n)}(x_0)$ es la n-ésima derivada de f evaluada en el punto x_0, siempre que todas las derivadas de $f(x)$ existan en el punto x_0. Las funciones que se pueden expresar mediante una serie de Taylor se denominan "funciones regulares".

La serie de Taylor también se puede expresar de manera compacta como una sumatoria: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Cuando se toma como centro $x_0 = 0$, se obtiene un caso especial que se conoce como **serie de Maclaurin**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

Ejemplos de series

COMO SERIE	COMO SUMATORIA
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (para $-1 < x < 1$)	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ (para $-1 < x \le 1$)	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

Serie de Taylor para una función de varias variables

Para una función de dos variables, la serie de Taylor (hasta los términos de primer grado) es:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} + (y - y_0)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} + \cdots$$

y para tres variables:

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + (x - x_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0} + (y - y_0)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0,z_0} + (z - z_0)\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{x_0,y_0,z_0} + \cdots$$