SUMATORIAS $\sum$

Definición

Si existe una secuencia de elementos identificados como $\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$, donde m y n son números enteros, su sumatoria está definida como:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \equiv a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

donde la variable k se denomina **índice**, y se dice que toma los valores desde m hasta n (llamados límite inferior y límite superior, respectivamente). Una notación alternativa, especialmente para ecuaciones que se escriben como parte de un párrafo, es poner los límites de la sumatoria como subíndice y superíndice: $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

En ocasiones, se representa los elementos de la sumatoria como una función de k:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$

La variable que se usa como índice es una variable "ficticia": se puede representar la misma sumatoria empleando diferentes índices, siendo completamente equivalente este cambio de representación:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=m}^{n} f(i)$$

Frecuentemente, de manera informal, se escribe únicamente el valor de los límites arriba y debajo de la sumatoria, entendiéndose cuál variable es el índice:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{m}^{n} f(k)$$

También se puede omitir los límites, entendiéndose del contexto cuáles son los valores posibles del índice:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k} a_k \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_k$$

(cuando el contexto no deja lugar a duda)

Una sumatoria pueden tener uno o ambos índices infinitos, definiéndose formalmente como:

$$\sum_{m}^{\infty} f(k) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad \sum_{-\infty}^{n} f(k) \equiv \lim_{m\to-\infty} \sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} f(k) \equiv \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to-\infty}} \sum_{k=m}^{n} f(k)$$

Las sumatorias se pueden combinar empleando más de un índice:

$$\sum_{i=m_1}^{n_1} \sum_{j=m_2}^{n_2} f(i,j)$$

que sería la suma de los términos de todas las posibles combinaciones de i y j entre los límites especificados. Nuevamente, si no hay ambigüedad, se puede omitir los límites o emplear un solo símbolo de sumatoria:

$$\sum_{i=m_1}^{n_1} \sum_{j=m_2}^{n_2} f(i,j) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i} \sum_{j} f(i,j) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i,j} f(i,j)$$

Propiedades generales

Donde sea apropiado, C es una constante, m, n y p son números enteros.

★ $$\sum_{k=m}^{n} C = C(n-m+1)$$

★ $$\sum_{k=1}^{n} C = Cn$$

★ $$\sum_{k=m}^{n} C \cdot f(k) = C\sum_{k=m}^{n} f(k)$$

★ $$\sum_{k=m}^{n}\left[f(k)+g(k)\right] = \sum_{k=m}^{n} f(k) + \sum_{k=m}^{n} g(k)$$

★ $$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m}^{p} f(k) + \sum_{k=p+1}^{n} f(k)$$

(separación en dos sumatorias)

★ $$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$$

(desplazamiento del índice)

★ $$\sum_{k=m}^{m} f(k) = f(m)$$

(cuando ambos límites son iguales)

★ $$\sum_{k=m}^{n<m} f(k) = 0$$

(suma vacía, límite superior menor que límite inferior)

★ $$\sum_{i=m_1}^{n_1}\sum_{j=m_2}^{n_2} f(i,j) = \sum_{j=m_2}^{n_2}\sum_{i=m_1}^{n_1} f(i,j)$$

(intercambio del orden de dos sumatorias)

Algunas sumatorias notables

★ $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

★ $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

★ $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

★ $$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$$

★ $$\sum_{k=m}^{n-1} x^k = \frac{x^m - x^n}{1-x}$$

★ $$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

Productos

Por analogía con la sumatoria, también se puede definir un producto de una secuencia $\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots, a_{n-1}, a_n\}$:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k \equiv a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_{n-1} \cdot a_n$$

Por las propiedades de los logaritmos, se tiene también que: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)$